

5 ŠPECIFIKÁ JADROVOFYZIKÁLNEHO MERANIA

UČEBNÉ CIELE

Pri meraniach s ionizujúcim žiarením sa vyskytujú štatistické chyby. Sú spôsobené pravdepodobnostným charakterom rádioaktívneho rozpadu jadier ako aj pravdepodobnostným charakterom procesu interakcie častíc a fotónov s médiom detektora. Cieľom kapitoly je charakterizovať spôsoby merania zabezpečujúce požadovanú dôveryhodnosť nameraných údajov, získaným pomocou elektronickej aparatúry s detektorom. Oboznámiť sa príčinami šumu v detektore a v zosilňovači. Na základe náhradného obvodu pochopiť cesty, ktorými možno šum minimalizovať. Oboznámiť sa s pojmom ekvivalentný šumový náboj, pomocou ktorého možno kvalitatívne posúdiť vplyv detektora a predzosilňovača na pomer signál / šum.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Štatistická neistota, spoľahlivosť nameraného údaja, pozadie, Poissonovo a Gaussovo rozdelenie, rozptyl nameraných hodnôt, stredná hodnota, stredná kvadratická odchýlka, signál, šum, stredná hodnota, stredná kvadratická hodnota, "biely" a "ružový" šum, spektrálna hustota šumu, tepelný šum, výstrelový šum, blikavý šum, ekvivalentný šumový náboj,

5.1 PRESNOŠ MERANIA

K špecifiku meraní v jadrovej fyzike patrí pravdepodobnostný charakter:

- rádioaktívneho rozpadu jadier;
- procesu interakcie žiarenia (častíc a fotónov) s médiom detektora a tiež vplyv šumov aparatúry.

Tieto náhodné procesy ovplyvňujú presnosť a dôveryhodnosť merania.

Náhodné javy v procese rádioaktívneho rozpadu možno popísať s pomocou kvantovej mechaniky. Štatistické neistoty možno charakterizovať na základe pravdepodobnosti počtu rozpadov $P(n)$ ako funkciu rozpadovej konštanty λ a doby merania t .

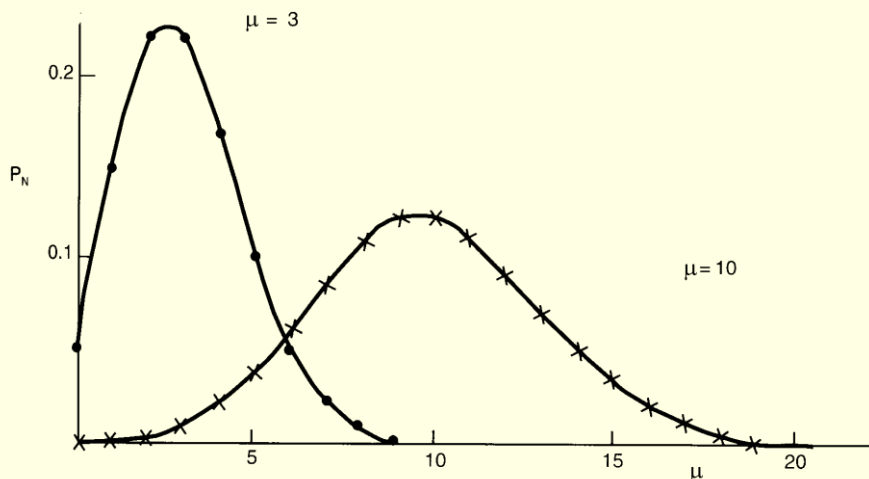
5.1.1 Štatistické neistoty rádioaktívneho rozpadu

Pre veľký celkový počet aktívnych atómov n a malú pravdepodobnosť rozpadu ($\lambda t \ll 1$) možno použiť na charakterizovanie rozdelenia pravdepodobnosti počtu rozpadov tzv. **Poissonovo rozdelenie** (obr. 5-1a):

$$P(n) = \frac{\mu^{-n}}{n!} e^{-\mu},$$

v ktorom: $\mu = \lambda t$ udáva **stredný počet** rozpadov za dobu t .

$\sigma = \sqrt{\mu}$ je **stredná kvadratická odchýlka**



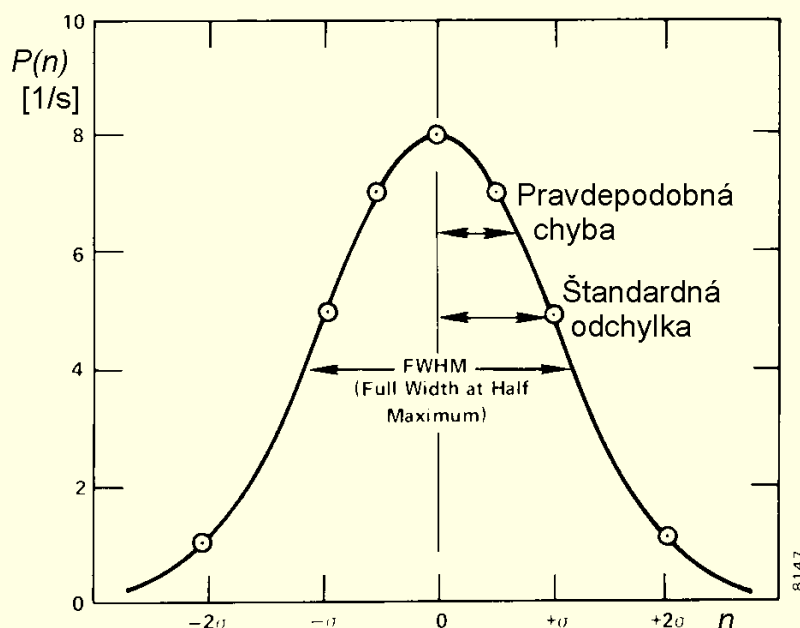
Obr. 5-1a.

Porovnanie Poissonovho rozdelenia pre strednú hodnotu $\mu=3$ a $\mu=10$.

Pre prípad väčších hodnôt μ ($\mu > 10$ až 15) možno aproximovať Poissonovo rozdelenie **Gaussovým rozdelením** (obr. 5-1b), ktoré charakterizuje rozdelenie náhodnej premennej n v okolí strednej hodnoty μ , kde má Gaussova funkcia maximum.

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Pri meraniach rádioaktívneho rozpadu (charakterizovaného rozpadovou konštantou λ alebo polčasom rozpadu $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$) sa vyskytujú štatistické chyby. Na základe predpisu MSA 0104-97 sa namiesto pojmu "chyba" zaviedol výraz "neistota".



Obr. 5-1b

Príklad Gaussovho rozdelenia, charakterizujúceho rozloženie frekvencovanosti výskytu meraných udalostí $P(n)$ v okolí strednej hodnoty $n=0$.

5.1.2 Presnosť výsledku – vplyv predĺženia merania

Pri uvádzaní výsledku **na charakterizovanie spoľahlivosti tohto výsledku** sa uvádza aj **neistota** σ . Napríklad pre počet výskytov meranej udalosti $N \pm \sigma_N$ pripadajúcich na dobu merania t alebo počet udalostí za jednotkový interval - **početnosť** $n = N/t \pm \sigma_n$ je stredná kvadratická odchýlka:

$$\sigma_N = \sqrt{N}, \quad \text{resp.} \quad \sigma_n = \frac{\sigma_N}{t} = \frac{\sqrt{N}}{t}.$$

V praxi často je predmetom záujmu nielen absolútna, ale aj **relatívna (percentuálna) neistota** výsledku danú pomerom:

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} \pm = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Príklad 5-1

Predpokladajme, že pri meraní rádioaktivity vzorky sa zaregistroval za intervaly 1s a 100s určitý počet udalostí (v tvare počtu impulzov N_a a v tvare početnosti n_a). Špecifikujte hodnovernosť nameraného údajá.

Riešenie:

1) Počet udalostí N_a

Na displeji počítadla zobrazil údaj $N_a=100$ impulzov. Potom zaregistrovaný počet udalostí možno charakterizovať neistotou $s_{N_a}=N_a^{1/2}=10$ impulzov a údaj zapísať v tvare :

$$N_a \pm s_{N_a} = N_a \pm \sqrt{N_a} = 100 \pm \sqrt{100} = (100 \pm 10) \text{ udalostí.}$$

Získaný počet udalostí N_a bol teda odmeraný s relatívnou neistotou:

$$\frac{s_{N_a}}{N_a} = \frac{\sqrt{N_a}}{N_a} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} = 0,1 = 10\%$$

2) Početnosť n_a

Ak bol získaný údaj počtu impulzov N_a , odmeraný za časový interval 1s je $N_a=n_a$ a početnosť:

$$n_a = \frac{N_a}{t_a} \pm \frac{\sqrt{N_a}}{t_a} = (100 \pm 10) \text{s}^{-1}$$

Táto početnosť je odmeraná s rovnakou relatívnou neistotou ako v predošlom prípade:

$$\frac{s_{n_a}}{n_a} = \frac{\sqrt{N_a}/t_a}{N_a/t_a} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} = 0,1 = 10\%$$

3) Predĺženia doby merania

V prípade predĺženia doby merania na $t_{a2}=100\text{s}$ by sa z tohto žiariča mohlo zaregistrovať napr. $N_{a2}=10000$ impulzov, čím by sa zmenšila relatívna neistota nameraného údajá:

$$N_{a2} \pm s_{N_{a2}} = N_{a2} \pm \sqrt{N_{a2}} = 10000 \pm \sqrt{10000} = (10000 \pm 100) \text{ udalostí,}$$

teda namerá by sa počet udalostí s menšou relatívnou neistotou:

$$\frac{s_{N_{a2}}}{N_{a2}} = \frac{\sqrt{N_{a2}}}{N_{a2}} = \frac{1}{\sqrt{N_{a2}}} = 0,01 = 1\%$$

4) Početnosť pri predĺženej dobe merania

Ak by sme na základe údajá z bodu 3 (pri dobe merania na $t_{a2}=100\text{s}$ a pri zaregistrovaní $N_{a2}=10000$ impulzov), určili početnosť:

$$n_{na2} = \frac{N_{a2}}{t_{a2}} \pm \frac{\sqrt{N_{a2}}}{t_{a2}} = \frac{10000}{100} \pm \frac{100}{100} = (100 \pm 1) s^{-1}$$

dosiahneme rovnakú relatívnu neistotu (ako v prípade 3):

$$\frac{s_{na2}}{n_{a2}} = \frac{\sqrt{N_{a2}}/t_{a2}}{N_{a2}/t_{a2}} = \frac{1}{\sqrt{N_{a2}}} = 0,01 = 1\%$$

Uzáver, plynúci z príkladu 5-1:

Ak chceme zaregistrovať počet udalostí (impulzov) N s presnosťou okolo 1% je nutné predĺžiť trvanie merania (alebo použiť koncentrovanejšiu vzorku) tak, aby počet udalostí $N \sim 10000$. Potom je $\sigma/\mu = [(N)^{1/2}/N = 0,01$ t.j. 1%.

5.1.3 Presnosť výsledku – vplyv opakovaného merania

Často sa tiež vykonávajú opakované merania tej istej vzorky. Predpokladajme, pre jednoduchosť, že vzorka bola meraná viackrát (m - krát) na tom istom zariadení, v tých istých podmienkach a vždy sa registrovali impulzy za tú istú dobu merania. Potom pre **odhad strednej hodnoty** platí:

$$N_{\mu} = \frac{(N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_m)}{m}$$

a pre neistotu (strednú kvadratickú odchýlku) tohto odhadu strednej hodnoty platí

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{N_{\mu}}{m}}$$

Takto zadefinovaná neistota σ_{μ} je limitným prípadom **pre prípad nekonečného počtu meraní m . Pre bežnú prax** (s konečným, väčšinou menším počtom členov m výberového súboru) sa používa **odhad neistoty strednej hodnoty** :

$$s_{\mu} = \sqrt{\frac{N_{\mu}}{(m-1)}}$$

Uzáver plynúci z opakovania merania :

Presnosť merania možno teda zlepšiť predĺžením trvania merania, alebo vykonaním viacnásobného počtu meraní.

5.1.4 Overenie rozptylu merania pomocou experimentu

Experimentálne si vyššie uvedené tvrdenia možno overiť pomocou mnohonásobného opakovania registrácie určitej početnosti impulzov z detektora, tak ako sa to robí v úvodnej úlohe Praktika 4 na FMFI UK. Na obr. 5-2a je súbor 100 hodnôt získaných opakovaním merania predvolenej hodnoty početnosti.

```

=====
Data pre histogram Gaussovho rozdelenia
=====
39, 51, 37, 47, 40, 35, 38, 39, 47, 49,
44, 34, 39, 49, 38, 37, 41, 39, 39, 44,
38, 63, 47, 53, 44, 37, 53, 29, 43, 34,
49, 43, 55, 39, 44, 44, 53, 45, 46, 41,
56, 49, 48, 44, 37, 40, 33, 40, 40, 37,
51, 44, 34, 27, 37, 58, 38, 47, 31, 39,
34, 42, 45, 36, 48, 40, 43, 31, 49, 47,
38, 40, 38, 41, 35, 44, 48, 65, 51, 47,
45, 50, 41, 43, 47, 36, 53, 33, 47, 41,
33, 35, 50, 46, 35, 40, 41, 47, 42, 49,
=====

```

Obr. 5-2a

Súbor opakovaných meraní početností zo scintilačného detektora , nameraných v úlohe Praktika 4 na FMFI UK.

Výberový súbor 10 hodnôt z 1 stĺpca obr. 5-2a je na obr 5-2b.

Obr. 5-2b – výberový súbor hodnôt z 1 stĺpca tabuľky na obr. 5-2a

$N_i [s^{-1}]$	39	44	38	49	56	51	34	28	45	33
$s_i [s^{-1}]$	6.24	6.63	6.16	7.00	7.48	7.14	5.83	5.29	6.71	5.74

Na základe $k=100$ hodnôt z tabuľky z obr. 5-2a je na obr. 5-2c zhotovený histogram závislosti počtu výskytov jednotlivých registrovaných hodnôt, ktorý svojim tvarom pripomína krivku Gaussovho rozdelenia na obr. 5-1b. Tento histogram má stred píku pri strednej hodnote početnosti) $n_0=42,5 \pm 6,5 s^{-1}$. Na preloženie fitovacej krivky Gaussovho rozdelenia $y_G(N_i)$ z nameraných hodnôt možno použiť vzťah:

$$y_G(N_i) = \frac{P}{\sqrt{2\pi n_0}} \cdot \exp\left[-\frac{(N_i - n_0)^2}{2\sigma^2}\right]; \text{ kde}$$

$$P = \sum_{i=1}^k y_i; \quad n_0 = \sum_{i=1}^k \frac{N_i y_i}{y_i}; \quad \sigma = \sqrt{n_0};$$

v ktorom po zaregistrovaní k udalostí je:

- σ Stredná kvadratická odchýlka $\sigma = (n_0)^{0.5}$
- P - Plocha pod píkom $P = \sum y_i$, (y_i je počet výskytov hodnoty N_i)
- n_0 - Stredná hodnota počtu výskytov $n_0 = \sum (N_i y_i / y_i)$
- $y(n_0)$ - Hodnota $y(n_0) = P / (2\pi \cdot n_0)^{0.5}$

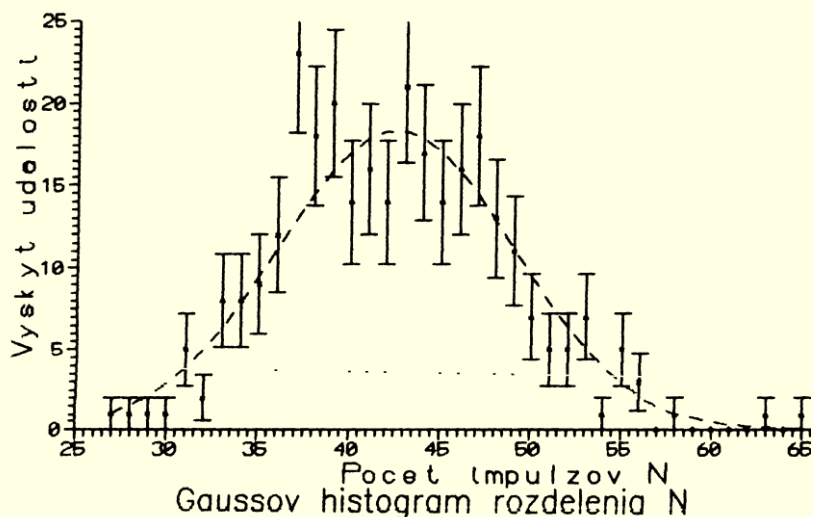
Uzávery plynúce z uvedeného merania :

Na základe σ Gaussovho rozdelenia aproximujúceho histogram z obr. 5-2c možno tvrdiť, že **odhad výskytu udalostí**:

- **na úrovni štandardnej odchýlky σ (v intervale $\langle n_0 - \sigma, n_0 + \sigma \rangle$)** je správny pre 68,3% prípadov. To, že v malom súbore hodnôt na obr. 5-2b to celkom striktné neplatí, lebo 4 hodnoty ($N_5=56$, $N_6=51$, $N_8=28$, $N_{10}=33$, t.j. 40% údajov) sú mimo interval $n_0=42,5 \pm 6,5 s^{-1}$ a jedna hodnota ($N_4=49$) je na hranici intervalu $\langle 36, 49 \rangle$ odhadu na úrovni štandardnej odchýlky σ len demonštruje, že ide o aplikovanie štatistiky na súbor s malým počtom údajov;
- **na úrovni 2 štandardných odchýlky σ (v intervale $\langle n_0 - 2\sigma, n_0 + 2\sigma \rangle$)** je správny v 95% prípadoch ;

- na úrovni 3 štandardných odchyliiek σ (v intervale $\langle n_0 - 3\sigma, n_0 + 3\sigma \rangle$) je správny v 99,75% prípadoch;

Záleží teda na našom rozhodnutí na akej úrovni odhadu výsledky uvádzame, resp. od toho koľko nás bude stáť mylný odhad alebo jeho dôsledky. Štatistika hovorí len s akou pravdepodobnosťou je daný typ hodnotenia spoľahlivosti správny.



Obr. 5-2c.

Na základe údajov z obr. 5-2a zhotovený histogram počtu výskytov jednotlivých početností.

Príklad 5-2

Ako zdroj údajov pre príklad použijeme 10 hodnôt nameraných počtov udalostí N_i z prvého stĺpca tabuľky na obr. 5-2a (doplnené o neistoty s_i jednotlivých meraní), ktoré sú v tabuľke na obrázku 5-2b. Porovnajme presnosť výsledku merania početnosti získanej pomocou merania N za 10 sekúnd a početnosti ako strednej hodnoty z opakovaného merania 10 hodnôt početností.

Riešenie:

1) Početnosť na základe jedného 1s merania

V dôsledku voľby trvania merania $t_i = 1s$ sú počty udalostí N_i číselne zhodné početnostiam $n_i = N_i / t_i \pm s_i$, a aj neistoty s_i početností sú číselne rovnaké ako neistoty jednotlivých meraní:

$$\sigma_N = \sqrt{N},$$

$$n_i \pm s_i = N_i \pm \sqrt{N_i}, \text{ podľa údajov z tabuľky na obr. 5-2b.}$$

2) Početnosť na základe jedného dlhšieho 10s merania

Ak by sme iným počítadlom zaregistrovali za dobu $t_{10} = \sum t_i = 10s$ počet udalostí N_{10} bude toto jednotlivé sumárne (10 sekundové) meranie počtu udalostí $N_{10} = \sum N_i$ charakterizované neistotou $s_{10} = (N_{10})^{1/2} = 20,4 (10s)^{-1}$.

$$\sum N_i = (36 + 44 + 38 + 49 + 56 + 51 + 34 + 28 + 45 + 33);$$

$$N_{10} = N_{10} \pm (N_{10})^{1/2} = (417 \pm 20,4) [1/10s]$$

prípade ak chceme na základe tohto údajja určiť početnosť bude odhad strednej hodnoty početností:

$$n_{10} = \frac{N_{10}}{t_{10}} \pm \sqrt{\frac{N_{10}}{(t_{10})^2}} = \frac{N_{10}}{t_{10}} \pm \frac{\sqrt{N_{10}}}{t_{10}} = (41,7 \pm 2,04)s^{-1}.$$

$$\text{určený s neistotou } s_{10} = (N_{10}/t_{10})^{1/2} = (N_{10})^{1/2}/t_{10} = 20,42/10 = 2,04 s^{-1}.$$

3) Porovnanie výsledkov z bodu 1 a 2

Meranie za dlhší časový interval je presnejšie ako namerané početnosti za 1s z tabuľky na obr. 5-2b, lebo neistota odhadu početnosti na základe dlhšieho merania

$$s_{10} = (N_{10}/t_{10})^{1/2} = (N_{10})^{1/2}/t_{10} = 2,04s^{-1} \text{ je menšia ako neistoty jednotlivých meraní početností (napr. } s_5 = 7,48 s^{-1} \text{ pri } N_5 \text{ v tabuľke);}$$

Neistota tohto merania bude menšia ako neistota jednotlivého merania N_i , vykonaného za dobu 1s v bode 1.

4) Porovnanie dlhšieho merania a opakovaných kratších meraní

Ak chceme porovnať vplyv predĺženia trvania merania z bodu 2 s vykonaním viacnásobného počtu meraní môžeme pokladať $m=10$ hodnôt z tabuľky za opakované merania N_i tej istej vzorky a s pomocou nich odhadnúť strednú hodnotu (v danom prípade 1s trvania merania ide o strednú početnosť).

$$n_m = \frac{\sum N_i}{m} \pm s_m = \left(\frac{\sum N_i}{m} \pm \sqrt{\frac{\sum N_i}{(m-1)}} \right) = (41,7 \pm 2,15) s^{-1}, \text{ s odhadom neistoty } s_m = 2,15 s^{-1}.$$

Ak budeme zväčšovať počet opakovaných meraní bude $s_m \sim \sigma_m$ a zhoda bude lepšia:

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum N_i}{(m-1)}} \approx \frac{\sqrt{N_i}}{m} = \frac{\sqrt{N_{10}}}{t_{10}} \approx 2,04 s^{-1}.$$

5) Výsledné porovnanie bodu 2 a 4:

Na základe výsledkov z tohto príkladu vidno, že neistota odhadu početnosti pri opakovanom meraní

$$s_m = \left\{ \frac{\sum N_i}{m(m-1)} \right\}^{1/2} = 2,15 s^{-1}$$

je obdobná ako v odseku 2 a teda je menšia ako sú neistoty jednotlivých meraní (napr. $s_5 = 7,48 s^{-1}$ pri N_5 v tabuľke);

Presnosť určenia strednej početnosti v prípade 3 je prakticky rovnaká ako presnosť dosiahnuteľná s pomocou dlhšieho merania v prípade 2.

5.1.5 Vplyv pozadia

Pri meraní rádioaktívneho žiarenia, kde pozadie N_p je relatívne veľké sa odlišuje počet zaregistrovaných udalostí N_v (impulzov) od počtu impulzov N od vzorky:

$$N = (N_v - N_p) \pm \sqrt{(N_v + N_p)},$$

resp. po prepočítaní na jednotku času (s) je odhad početnosti impulzov:

$$n = \frac{N}{t} \pm \sqrt{\frac{n}{t}} = \frac{(N_v - N_p)}{t} \pm \sqrt{\frac{(N_v + N_p)}{t^2}} = \frac{(N_v - N_p)}{t} \pm \frac{\sqrt{(N_v + N_p)}}{t}.$$

Príklad 5-3

Pri meraní za interval $t=100s$ sa namerá počet impulzov od vzorky $N_{vp}=1000$. Pri meraní bez vzorky sa odmeralo za interval $t=10000s$ pozadie $N_p=100$. Určite strednú hodnotu početnosti od vzorky bez pozadia a s pozadím a porovnajte.

Riešenie:

1) Bez pozadia

Pri odmeraní počtu impulzov $N=1000$ za interval $t=100s$ je odhad strednej hodnoty početnosti (tohto jediného merania, s príslušnou neistotou odhadu):

$$n = \frac{N}{t} \pm \sqrt{\frac{n}{t}} = \frac{N}{t} \pm \sqrt{\frac{N}{t^2}} = \frac{1000}{100} \pm \frac{\sqrt{1000}}{100} = (10 \pm 0,3) s^{-1}.$$

Teda presnosť výsledku charakterizuje relatívna neistota 3%.

2) Prítomnosť pozadia

Pri odmeraní počtu impulzov od vzorky $N_{vp}=1000$ za interval $t=100s$ odmeraný za prítomnosti pozadia ($N_p=100$ za interval $t=10000s$) je odhad strednej hodnoty početnosti od vzorky

$$n = \frac{N}{t_v} \pm \sqrt{\frac{n}{t_p}} = \frac{N_{vp}}{t_v} - \frac{N_p}{t_p} \pm \sqrt{\frac{N_{vp}}{t_v^2} + \frac{N_p}{t_p^2}} = \frac{1000}{100} - \frac{100}{10000} \pm \sqrt{\frac{1000}{100^2} + \frac{100}{10^8}} = (9,99 \pm 0,1)s^{-1}.$$

Vďaka predĺženému trvaniu merania pozadia sa spresnil výsledok (charakterizuje ho relatívna neistota 1%) a pozadie už prakticky nevlýva na presnosť výsledku.

3) Rovnaká doba merania vzorky a pozadia

Pre porovnanie pri použití rovnakého trvania merania pre pozadie a vzorky $t=100s$ by bol výsledok $n=9,99 \pm 1,1s^{-1}$ - teda oveľa menej dôveryhodnejší. Presnosť tohto výsledku charakterizuje relatívna neistota 11%.

Príklad 5-4

Pri viacnásobnom odmeraní tej istej početnosti impulzov za interval $t=1s$ sa získali hodnoty $n_1=620$, $n_2=627$, $n_3=622$. Aká je dôveryhodnosť merania?

Riešenie.

Odhad strednej hodnoty početnosti (za interval $t=1s$) je

$$n = \frac{620 + 627 + 622}{3} \pm \sqrt{\frac{620 + 627 + 622}{3^2}} = (623 \pm 14,4)s^{-1}.$$

Teda presnosť výsledku charakterizuje relatívna neistota 2,3%.

Uzáver :

Z vyššie uvedeného plynie poučenie: Pri nezamyslení sa nad problémom sa môže stať, že v rámci zrýchlenia merania vykonáme meranie vzorky a pozadia „rýchlo“ za rovnaký interval a dosiahneme menšiu presnosť ako bola očakávaná.

5.2 ŠUM AKO SPRIEVODNÝ JAV MERANÉHO SIGNÁLU

Šum je neželaný sprievodný jav meraného signálu, ktorý znižuje presnosť merania a tiež obmedzuje úroveň detekovateľnosti slabých signálov. Šum je dôsledok pôsobenia:

- náhodného tepelného pohybu nábojov v atómových vodičoch (tzv. tepelný alebo Johnsonov šum)
- náhodných fluktuácií prúdu ako dôsledok náhodného charakteru procesu pohybu náboja s odchýlkami dráhy, pomeru rekombinácie a difúzie (tzv. výstrelový šum).

Šumové fluktuácie napätí a prúdov sa superponujú na napätia a prúdy, tvoriace sledovaný signál s užitočnou informáciou, prípadne sa aj ďalej zosilňujú súčasne so signálom a tým zhoršujú presnosť merania, t.j. informačný obsah signálu. Pre nameranie korektných výsledkov treba, aby amplitúda šumových fluktuácií bola značne menšia, ako je amplitúda sledovaného signálu. Snahou experimentátorov je získať maximálny pomer signál šum: S/N.

Užitočne interpretovateľný signál možno (ako napätie alebo prúd v určitom časovom intervale $t_j - t_i$) charakterizovať jeho nenulovou strednou hodnotou (príklad 5-5), avšak v dôsledku náhodnosti výskytu kladnej a zápornej polarizácie amplitúdy šumu je **stredná hodnota šumu nula!** Šum možno charakterizovať len pomocou **strednej kvadratickej hodnoty** podobne ako sa používajú v elektronických

obvodoch tepelné účinky a efektívna hodnota (príklad 5-6) pri meraní neperiodických prúdov a napätí. Teda šum sa nedá porovnávať pomocou strednej hodnoty, napr. amplitúdy, ale dá sa charakterizovať len štatisticky strednou kvadratickou hodnotou, napr. efektívnym výkonom P_n , resp. strednou kvadratickou hodnotou napätia alebo prúdu.

Šum nemá špecifickú frekvenciu výskytu javu, nie je ho možné rozložiť na pravidelne sa opakujúce zložky s rôznymi frekvenciami. Väčšinou ho charakterizuje rovnomerné zastúpenie celého frekvenčného spektra, ktoré sa charakterizuje názvom – „**biely**“ šum, poprípade je sprevádzaný aj iným typom šumu so spektrálnou hustotou nepriamo úmernou frekvencii, ktorý sa nazýva – „**ružový**“ šum. Charakteristickou vlastnosťou šumu je však závislosť strednej kvadratickej hodnoty šumového napätia (resp. aj prúdu), v blízkosti frekvencie f_0 , pri šírke frekvenčného pásma df , od šírky pásma df .

$$\overline{U_n^2(f_0, df)} = S_n(f_0) \cdot df.$$

Funkcia $S_n(f)$, popisujúca zdroj šumu, sa nazýva **spektrálna hustota šumu**. S jej pomocou potom možno vyjadriť strednú kvadratickú hodnotu šumového napätia, resp prúdu:

$$\overline{U_n^2} = \int_0^{\infty} S_{nu}(f) \cdot df; \quad \overline{I_n^2} = \int_0^{\infty} S_{ni}(f) \cdot df.$$

Šum možno porovnávať na báze efektívneho výkonu $P_n/\Delta f$, pripadajúceho na Hz v strede určitého frekvenčnom pásma Δf alebo na základe spektrálnej hustoty šumového zdroja napätia S_{nu} alebo prúdu S_{ni} . Na základe analógie s efektívnou hodnotou striedavého napätia pre zjednodušenie tvorby náhradného obvodu sa často interpretuje S_{nu} aj ako „efektívna hodnota“ šumového zdroja napätia - $U_{nef}/(\Delta f)^{0,5}$, pripadajúcej na $(\text{Hz})^{0,5}$ v strede určitého frekvenčnom pásme Δf .

Šum možno teda charakterizovať:

- fyzikálnym mechanizmom, ktorý zodpovedá za jeho generovanie, napr. tepelný, výstrelový alebo blikavý šum a pod.
- frekvenčným spektrom, napr. už spomenutý biely alebo ružový šum,
- amplitúdovým rozdelením – spektrálnou hustotou šumu S_n .

Vo viacstupňovom zosilňovači najviac prispieva k šumovému výkonu prvý stupeň, ku ktorému je pripojený aj detektor, nakoľko tento stupeň má najväčšie celkové zosilnenie, menej prispieva druhý, u ktorého je zosilnenie menšie atď. Šum detektora a zosilňovača prispieva k fluktuácii signálu na výstupe zariadenia a tak zhoršuje presnosť merania amplitúdy signálu, resp. zhoršuje energetickú rozlišovaciu schopnosť spektrometického zariadenia.

5.2.1 Tepelný (Johnsonov) šum

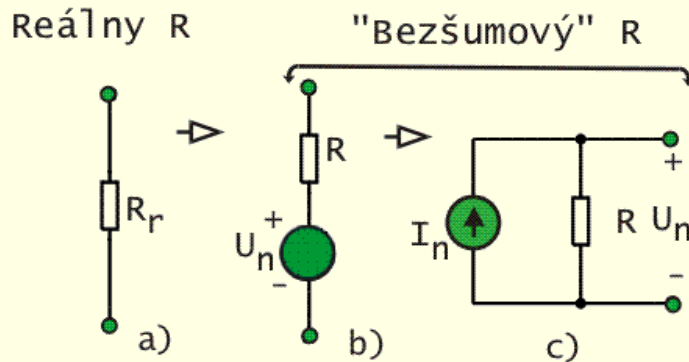
Rezistor generuje na svojich svorkách šumové napätie aj v tom prípade ak nie je pripojený k obvodu so zdrojom napätia. Tieto produkované fluktuácie napätia závisia od tepelnej energie pohybu nábojov a atómov vo vodičoch. Stredná kvadratická hodnota tohto šumového napätia

$$dU_n^2 = S_{nRu}(f) \cdot df = 4kTR \cdot df,$$

alebo s určitou dávkou pojmového zjednodušenia možno povedať, že „efektívna hodnota U_{nefR} tohto teplotne závislého šumového napätia“ na svorkách rezistora R je

$$U_{nefR} = \sqrt{4kT \cdot R \cdot \Delta f}.$$

Výraz $S_{nRu}=4kTR$, nezávisí od frekvencie a nazýva sa **spektrálna hustota tepelného šumového napätia** (T – absolútna teplota v K, $k=1,37 \cdot 10^{-23}$ sW/K – Boltzmannova konštanta, Δf – šírka pásma v Hz). Šum, charakterizovaný takouto spektrálnou hustotou, ktorá nezávisí od frekvencie a má spojité frekvenčné spektrum s jednotlivými frekvenčnými zložkami rovnakej amplitúdy sa nazýva „**bielym**“ šumom.



Obr. 5-3

a) Reálny rezistor R_r a jeho náhradný obvod pozostávajúci z „bezšumového“ rezistora R :

b) zdroja šumového napätia so spektrálnou hustotou: $S_{nRu}(f) = \frac{dU_n^2}{df} = 4kTR$;

c) zdroja šumového prúdu so spektrálnou hustotou: $S_{nRi}(f) = \frac{dI_n^2}{df} = \frac{4kT}{R}$.

Podľa obr. 5-3 sa na charakterizovanie tepelného šumu rezistora používa náhradný obvod, v ktorom reálny "šumový" odpor je nahradený ideálnym "bezšumovým" odporom R a šumy sú reprezentované zdrojom šumového napätia U_n (resp. prúdu I_n) so spektrálnou hustotou S_{nRu} alebo S_{nRi} . Napríklad rezistor $10k\Omega$ má na svojich svorkách efektívnu hodnotu napätia $1,3 \mu V$, meraného pri šírke pásma $\Delta f=10kHz$. Tepelný šum určuje dolný limit každého detektora alebo zosilňovača, ktorý má odpor. Šumový výkon závisí od šírky frekvenčného pásma. Zúžením frekvenčného pásma možno redukovať termálny šum.

Príklad 5-5

Kvôli zopakovaní základných pojmov ozrejmíte vzťah medzi strednou a efektívnou hodnotou periodického napätia $v(t)$, ktoré môže byť nositeľom užitočnej informácie - signálu.

Riešenie:

Stredná hodnota veličiny $v(t)$ v intervale $\langle t_j; t_i \rangle$ je

$$V_{st} = \frac{1}{t_j - t_i} \int_{t_i}^{t_j} v(t) \cdot dt; \text{ resp. } V_{st} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cdot dt.$$

Pre striedavé napätia s periódou T musí byť interval $t_j - t_i \neq T$, aby bola stredná hodnota nenulová. Fyzikálne možno strednú hodnotu interpretovať ako jednosmernú veličinu, napríklad strednú hodnotu periodického prúdu $i(t)$ ako jednosmerný prúd I_{st} , pri ktorom sa za dobu T preniesie rovnaký náboj Q , ako prúdom $i(t)$:

$$Q = I_{st} \cdot T = \int_0^T i(t) \cdot dt.$$

Efektívna hodnota periodickej veličiny $v(t)$ v intervale $\langle 0; T \rangle$ je

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt.}$$

Fyzikálne možno efektívnu hodnotu periodického prúdu $i(t)$, ktorý tečie cez konštantný odpor R , interpretovať ako jednosmerný prúd I , pôsobením ktorého sa počas doby T vyvinie na odpore R rovnaká energia ako pri prechode prúdu $i(t)$:

$$R \cdot I^2 \cdot T = \int_0^T R \cdot i^2(t) dt.$$

Príklad 5-6

K zdroju napätia $u(t)$ je pripojený reálny rezistor $R_r=1\Omega$. Vykonajte fyzikálnu interpretáciu strednej kvadratickej hodnoty výkonu, dodaného do odporu $R=1\Omega$ zo zdroja napätia $u(t)$ tak, že náhradíte reálny rezistor R_r „bezšumovým“ rezistorom s rovnakým odporom R a zdrojom šumového napätia $u_n(t)$, ktoré má spektrálnu hustotu tepelného šumu $S_{nRu}=4kTR$.

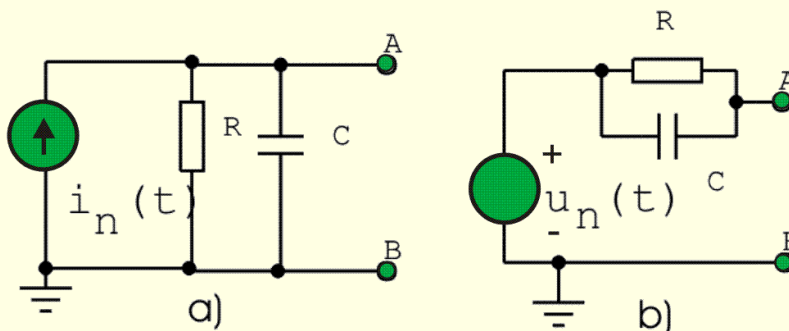
Riešenie:

Po náhrade bude „bezšumový“ rezistor R pripojený namiesto pôvodného napätia $u(t)$ k dvom do série zapojeným zdrojom: $u(t)$ a $u_n(t)$. Stredná hodnota výkonu dodaného do ideálneho „bezšumového“ odporu $R=1\Omega$ pozostáva z konštantného výkonu dodaného zo zdroja napätia $u(t)$ a zo „šumového“ výkonu, ktoré vyvolá fluktuácie napätia $u_n(t)$:

$$P_R = \frac{[\overline{u(t) + u_n(t)}]^2}{R} = \overline{u^2(t)} + \overline{u_n^2(t)} + 2 \cdot \overline{u(t) \cdot u_n(t)} = \overline{u^2(t)} + \overline{u_n^2(t)};$$

nakoľko $\overline{u(t) \cdot u_n(t)} = 0$ a $R = 1\Omega$.

Výsledok potvrdzuje obecný poznatok, plynúci z princípu superpozície pôsobenia viacerých nekoherentných zdrojov signálu - výsledná stredná kvadratická hodnota amplitúdy bude rovná súčtu štvorcov stredných kvadratických hodnôt amplitúd od každého nezávislého zdroja.



Obr. 5-4

- a) Kondenzátor C paralelne spojený s bezšumovým rezistorom R a prúdovým zdrojom tepelného šumu $i_n(t)$
 b) Theveninova náhrada obvodu šumovým napätím $u_n(t)$.

Príklad 5-7

Zapojenie na obr. 5-4, ktoré pozostáva z paralelne spojeného RC článku a prúdového zdroja tepelného šumu. Takéto zapojenie vznikne z RC článku po náhrade reálneho odporu paralelným prúdovým zdrojom šumu $i_n(t)$ a „bezšumovým“ ekvivalentom odporu. Podľa Theveninovej poučky pretransformujte zapojenie a) na obvod s náhradným zdrojom šumového napätia a zistite jeho vlastnosti.

Riešenie:

Prechod signálu cez lineárny obvod možno charakterizovať prenosovou funkciou v tvare $F(p)$, alebo v tvare $F(j2\pi f)$. Napríklad prenos cez integračný RC článok má tvar

$$F(p) = \frac{U_C(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{1 + pCR};$$

resp. po zavedení označenia $p = j\omega = j2\pi f$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot CR} = \frac{1}{1 + j \cdot (2\pi f) \cdot CR} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (CR)^2}} \cdot e^{-\arctg(\omega \cdot CR)}.$$

Podobne prechodom cez lineárny obvod sa zmení spektrálna hustota šumu $S_n(f)$ tak, že na výstupe obvodu bude spektrálna hustota šumu $S_{n2}(f) = |F(j2\pi f)|^2 \cdot S_n(f)$. Ak v prípade tohto RC článku použijeme spektrálnu hustotu šumového prúdu $S_n(f) = S_{ni}(f) = 4kT/R$, potom na výstupe RC článku má šumové napätie na svorkách A-B spektrálnu hustotu v tvare:

$$S_{nu2}(f) = \frac{S_{ni}(f) \cdot R^2}{1 + (2\pi f \cdot CR)^2} = \frac{\frac{4kT}{R} \cdot R^2}{1 + (2\pi f \cdot CR)^2} = \frac{4kT \cdot R}{1 + (2\pi f \cdot CR)^2}.$$

Stredná kvadratická hodnota náhradného šumového zdroja napätia na svorkách A-B (resp. na kondenzátore C):

$$\overline{U_{nC}^2} = 4kT \cdot R \cdot \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (2\pi f \cdot CR)^2} = \frac{kT}{C}.$$

Z výsledku sa zdá, že šumové napätie závisí len od teploty T a kapacity C a nezávisí od odporu R . Je to len zdanlivé, lebo odpor R figuruje vo vzťahu pre $S_{nu2}(f)$ a tam podstatne ovplyvňuje šírku frekvenčného pásma.

5.2.2 Výstrelový šum

Je to šum spôsobený štatistickými fluktuáciami prúdu diskretných elektrických nábojov. Prejavuje sa hlavne u vstupných aktívnych prvkoch, cez ktoré preteká prúd. Napr. jeho zdrojom môže byť vstupný pokojový jednosmerný prúd tranzistora, ktorý fluktuuje okolo strednej hodnoty, danej stredným počtom elektrónov, podobne ako kolíše klepot dažďových kvapiek na strechu. **Spektrálna hustota výstrelového šumu** $S_{nvi}(f) = 2eI_b$, je úmerná jednosmernému prúdu I_b , napr. detektora, poprípade jednosmernému prúdu bázy vstupného tranzistora (e – náboj elektrónu $1,6 \cdot 10^{-19}C$). Preto je pre nízkošumové aplikácie **snaha udržať vstupný jednosmerný prúd minimálny**. Na vstupoch nízkošumových zosilňovačov sa preto viac používajú unipolárne tranzistory s prakticky nulovým vstupným prúdom. Výstrelový šum, podobne ako tepelný, patrí do kategórie “bieleho” šumu, s rovnomerne rozloženým frekvenčným spektrom.

Výstrelový šum sa v menšej miere prejavuje aj vo výstupnom obvode tranzistora, resp. aj v ďalších tranzistoroch zosilňovacích stupňov. Kvôli porovnávaniu rôznych zdrojov šumu je **vhodné mať fluktuácie výstupného kolektorového prúdu tranzistora vzťahnuté na vstupný obvod tranzistora**. Na tento prepočet sa v unipolárnych tranzistoroch používa strmosť g_m tranzistora (korigovanú koeficientom $3/2$), pomocou ktorej sa určí náhradný šumový odpor $R_S = 2/(3g_m)$. Spektrálna hustota výstrelového šumu vo výstupnom obvode tranzistora, prepočítaná na vstup tranzistora:

$$S_{nvT}(f) \approx 4kT \left(\frac{2}{3g_m} \right) = 4kT \left(\frac{0,7}{g_m} \right) = 4kTR_S.$$

5.2.3 Blikavý (Flickerov) šum

Teplný a výstrelový šum sú nereducovateľné typy šumu, vyplývajúce z fyzikálnych princípov. V reálnych zariadeniach sa niekedy vyskytuje ešte doplnkový šum, ktorý závisí od konštrukcie a zloženia materiálu určitých súčiastok, napr. rezistorov, ktorý vzniká ako dôsledok povrchových javov, ako doplnková fluktuácia vodivosti a pod. **Spektrálna hustota** $S_{nf}(f)=A_f/f$ tohto šumu je nepriamo úmerná frekvencii. Konštanta A_f charakterizuje rôzne prípady šumu, dobre charakterizuje aj náhodné procesy v dôsledku nestability zosilnenia, nestability napájacieho napätia, kolísania teploty a pod. Takýto typ šumu sa volá “**ružový**” šum. Jeho spektrum neprevyšuje frekvencie vyššie ako 1000Hz.

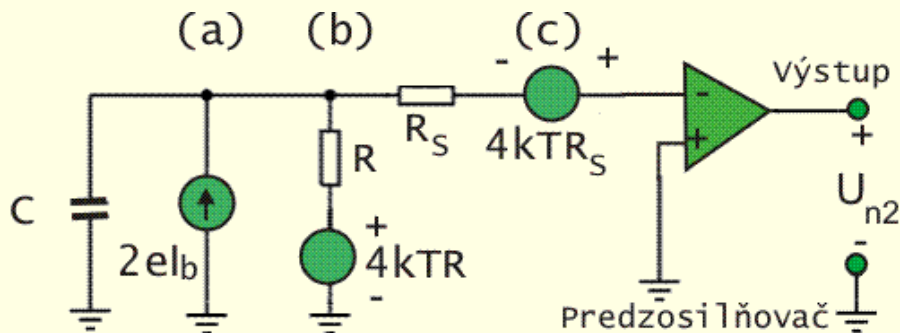
Príklad 5-8

Výsledky z príkladu 5-7 použite na návrh vhodného pracovného odporu R_L pre detektor s kapacitou $C=20\text{pF}$, ktorý je pripojený k zosilňovaču so šírkou pásma určenou časovými konštantami $\tau_i=\tau_d=\tau=1\mu\text{s}$, ktorá je optimálna pre dobu zberu náboja v tomto detektore.

Riešenie:

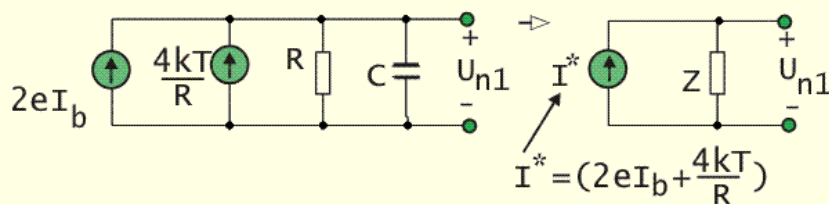
Na rozdiel od predošlého príkladu hranice integrovania nie sú nekonečné ale konkrétne, určené šírkou pásma zosilňovača $\Delta f=f_h-f_d$, teda tvarovaním signálu v zosilňovači, pomocou integračného RC a derivačného CR článku tak, že dolná hraničná frekvencie zosilňovača $f_d=1/2\pi\tau_d$ a horná hraničná frekvencia zosilňovača $f_h=1/2\pi\tau_i$.

Závislosť $S_{nu2}(f)=f(R)$ z príkladu 5-7 má pri voľbe $C=20\text{pF}$ a zadanej frekvencii $f=f_d=f_h=1/2\pi\tau$ maximum pri odpore $R=1/(2\pi fC)=50\ 000\Omega$. S ohľadom na dosiahnutie minimálnej veľkosti šumov, by detektor mal mať pracovný odpor $R_L \gg R=50\text{k}\Omega$, teda napr. $R_L=10\text{M}\Omega$.



Obr. 5-5a.

Zdroje šumu v obvode reprezentujúcom detektor (s kapacitou C , pracovným odpor R cez ktorý tečie prúd I_b), na vstupe zosilňovača (so zosilnením $A \sim 1$. Vstupný tranzistor JFET má strmost' g_m , pomocou ktorej možno prepočítať šum z výstupu JFET a charakterizovať ho sériovým odporom $R_S=0,7/g_m$).



Obr. 5-5b

Postup pri zjednodušovaní nahradného obvodu

Príklad 5-9

Charakterizujte spoločné pôsobenie tepelného a výstrelového šumu na vstupe zosilňovača (so zosilnením $A \sim 1$) podľa obr. 5-5a. Na vstupe zosilňovača je pripojený rezistor R a kondenzátor C , ktoré spolu reprezentujú časť náhradného obvodu detektora ionizujúceho žiarenia. Spektrálna hustota výstrelového šumu $2eI_b$ reprezentuje fluktuácie prúdu detektora. Výstrelový šum z výstupu JFET je pretransformovaný na vstup do sériovo zapojeného šumového odporu R_s .

Riešenie:

1) "Paralelná zložka šumu"

Paralelnú zložku šumu (pôsobenie zdrojov označených (a) a (b) na obr. 5-5a) detektora možno charakterizovať spoločnou spektrálnou hustotou prúdu. Potom tento spoločný šumový prúd I^* :

$$I^* = (2eI_b + \frac{4kT}{R}).$$

Zdroj prúdu I^* vytvára na impedancii $Z=R \parallel (1/j\omega C)$, paralelne zapojených R a C , napätie $U_{n1}=(I^* \cdot (R \parallel (1/j\omega C)))$ (resp. presnejšie spektrálnu hustotu U_{n1}^2 šumového napätia pripadajúcu na 1Hz frekvenčného pásma). Za predpokladu, že použitý zosilňovač, so zosilnením $A \sim 1$, má nastavenú šírku pásma priepustnosti pomocou časovej konštanty $\tau_i = \tau_d = \tau = RC$, možno mimo oblasti tohto pásma (kde platí $\omega RC \gg 1$), pomocou náhradného odporu R_p , zjednodušiť výraz pre vyjadrenie náhradného zdroja šumového napätia U_{n1} – tzv. "paralelnej zložky šumu":

$$U_{n1}^2 = (2eI_b + \frac{4kT}{R}) |Z(j\omega C)|^2 = \frac{4kTR}{(1 + (\omega CR)^2)} (1 + \frac{2eI_b R}{2kT}) = \frac{4kT}{(\omega C)^2 R_p};$$

$$\text{pre: } (\omega CR)^2 \gg 1 \text{ a } R_p = \frac{R}{1 + \frac{2eI_b R}{2kT}}.$$

Ekvivalentný odpor R_p spoločne charakterizuje tepelný a výstrelový šum detektora, s ekvivalentnou spektrálnou hustotou $4kT/((\omega C)^2 R_p)$, na vstupnej impedancii Z , po zosilnení $A \sim 1$, v pásme frekvencií $\Delta f = f_h - f_d$, v okolí frekvencie $f = 1/(2\pi\tau) \sim (f_d \cdot f_h)^{0,5}$.

2) "Sériová zložka šumu"

Šum z vstupu zosilňovača sa zosilňuje všetkými stupňami zosilňovača. Príspevok druhého a ďalších zosilňovacích stupňov k zväčšeniu šumu na výstupe zosilňovača možno zanedbať, voči príspevku od prvého zosilňovacieho stupňa, pretože zosilnenie bez prvého, druhého, resp. ďalších stupňov je vždy menšie, ako celkové zosilnenie. Spektrálna hustota šumového napätia na vstupe prvého tranzistora podľa obr. 5-6 bude pozostávať z vyššie uvedeného paralelnej zložky šumového napätia a tzv. „sériovej zložky šumového napätia“, ktorá charakterizuje prepočítaný výstrelový šum z výstupného obvodu tranzistora:

$$S_{nu}(f) = 4kT \left(\frac{1}{(2\pi f \cdot C)^2 R_p} + R_s \right).$$

Aj keď má kvôli zjednodušeniu zosilňovač napäťové zosilnenie $A \sim 1$, jeho šírku pásma obmedzujú tvarovacie obvody. Ak predpokladáme, že integračný článok s časovou konštantou τ_i a derivačný článok s časovou konštantou τ_d pôsobia na prenášaný signál nezávisle, nakoľko sme ich kvôli zjednodušeniu úvahy oddelili zosilňovacími stupňami $A = A_1 A_2 A_3 \sim 1$ (obr. 4-6), bude celkový prenos napätia takýmto zosilňovačom:

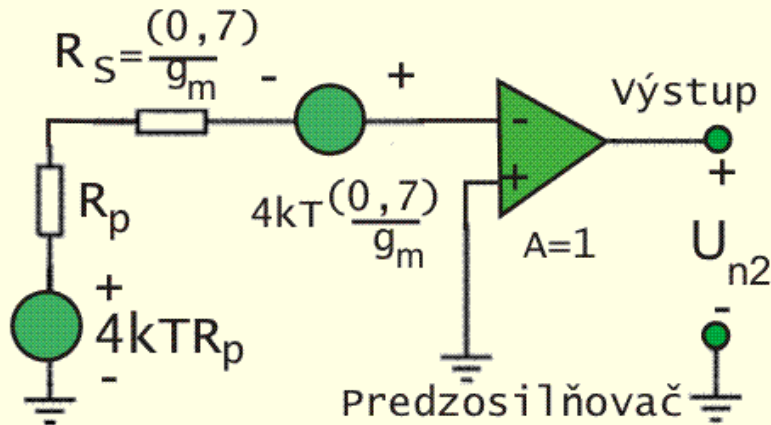
$$\underline{F}(j2\pi f) = A \cdot \frac{1}{1 + j2\pi f \cdot \tau_i} \cdot \frac{j2\pi f \cdot \tau_d}{1 + j2\pi f \cdot \tau_d}.$$

Za predpokladu $A \sim 1$ a $\tau_i = \tau_d = \tau$, čo zodpovedá frekvencii $f = \sqrt{f_d \cdot f_h}$, s minimálnou šírkou frekvenčného pásma Δf , je modul tejto komplexnej funkcie:

$$|\underline{F}(j2\pi f)| = \frac{2\pi f \cdot \tau}{1 + (2\pi f \cdot \tau)^2} \approx \frac{1}{2}.$$

Potom stredná kvadratická hodnota šumového napätia na výstupe tohto zosilňovača:

$$\overline{U_{n2}^2} = \int_{f_d}^{f_h} S_{nu}(f) |E(j2\pi f)|^2 df = \frac{4kT}{8} \left(\frac{\tau}{R_p C^2} + \frac{R_S}{\tau} \right).$$



Obr. 5-6.

Finálna úprava náhradného obvodu z obr. 5-5. Na vstupe zosilňovača teraz pôsobia dva zdroje napätia, reprezentujúce paralelnú ($U_{n1}=4kTR_p$) a sériovú zložku šumu ($U_S=4kTR_S$).

5.2.4 Ekvivalentný šumový náboj

Jednotlivé zložky šumu prispievajú k výslednému **šumu detektora so zosilňovačom**, úmerne šírke pásma Δf priepustnosti zosilňovača, ktorý zosilňuje signál z detektora. Pomocou vhodného zúženia frekvenčného pásma zosilňovača Δf (pri voľbe integračnej τ_i a derivačnej τ_d časovej konštanty $\tau_i=\tau_d$) možno zmenšiť vplyv šumu na signál, resp. optimalizovať pomer signál / šum.

K ďalšej úvahe použijeme výsledky z príkladu 5-9, kde sa určovala veľkosť ekvivalentného šumového náboja náhradného obvodu detektora. Pritom, v zhode s obr. 5-5, cez detektor tečie prúd I_b , jeho kapacita je C , používa pracovný odpor R a zosilňovač, ktorého vstupný tranzistor JFET má strmosť g_m . JFET sa nahradil, pri riešení tohto príkladu, "bezšumovým" tranzistorom a sériovým odporom $R_S=0,7/g_m$, podľa obrázku 5-5a, čo umožnilo prepočítať výstrelový šum z výstupu na vstup tranzistora JFET.

Z výsledku príkladu 5-9 plynie, že šum na výstupe zosilňovača s JFET, na vstupe, ktorého je detektor, bude minimálny pri voľbe:

- Čo najväčšieho náhradného odporu R_p paralelnej zložky šumu, t.j. ak bude:
 - čo najväčší pracovný odpor detektora R a čo najmenší vstupný prúd cez detektor I_b ,
 - resp. ak prúd ovládacej elektródy JFET bude **minimálny $I_b+I_{FET} \sim 0$** .
- Čo najmenšieho náhradného odporu sériovej zložky šumu R_S , t.j. ak pre unipolárny tranzistor bude strmosť $g_m=\delta i_D/\delta u_{GS}$ čo najväčšia.

Pre prvý stupeň nízkošumového zosilňovača sa preto robí **výber vstupných tranzistorov podľa strmosťi**, poprípade sa namiesto jedného JFET zapája na zvýšenie strmosťi **paralelne niekoľko JFET**.

Pri paralelne zapojených N tranzistoroch je výsledná stredná kvadratická hodnota šumového napätia $\overline{U_{nN}^2} = \overline{U_n^2} / \sqrt{N}$ t.j. je menšia ako stredná kvadratická hodnota šumového napätia $\overline{U_n^2}$ na výstupe jedného tranzistora. Počet tranzistorov N je obmedzený cenou a vzrastom vstupnej kapacity obvodu, takže reálne nebýva počet paralelne zapojených vstupných tranzistorov väčší ako 10. Tranzistory typu **MOSFET majú** do frekvencie 100kHz **väčší šum ako JFET** v dôsledku existencie blikavého šumu, ktorý je úmený $1/f$. Preto sa MOSFET pre oblasť frekvencií $f < 1\text{MHz}$ v nízkošumových predzosilňovačoch (napr. v predzosilňovačoch pre polovodičový detektor) nepoužívajú.

Signál z detektora ionizujúceho žiarenia má podobu náboja. Aby bol signál čo najpresnejšie odmeraný treba, aby bol **pomer S/N užitočného signálu S voči šumu N čo najväčší**. Preto je kvôli porovnávaniu snaha **aj šumy obdobne charakterizovať pomocou ekvivalentného šumového náboja Q_n , ktorý na výstupe detektora vytvorí danú strednú kvadratickú hodnotu šumového napätia**.

V prípade zberu "signálového" náboja $Q_s = eN_n = \Delta W / \omega$, ktorý vytvoril pri pohltení energie ΔW dopadajúceho žiarenia v citlivom objeme detektora N_n nosičov náboja (kde ω - potrebná energia na vytvorenie páru nosičov náboja). Na kapacite detektora C sa po zozbieraní náboja vytvorila amplitúda napäťového impulzu $U_s = Q_s / C$. Podobne možno predpokladať, že daná stredná kvadratická hodnota šumového napätia je spôsobená zberom **ekvivalentného šumového náboja Q_n** . Ak použijeme pre strednú kvadratickú hodnotu šumového napätia výsledok z príkladu 5-9 tak je to náboj:

$$Q_n = \sqrt{\overline{U_{n2}^2}} \cdot C = \sqrt{\frac{kT}{2} \left(\frac{\tau}{R_p} + C^2 \frac{R_s}{\tau} \right)}$$

Na základe tejto interpretácie možno **na charakterizovanie šumov** použiť rôzne jednotky:

- ekvivalentný šumový náboj Q_n [C],
- ekvivalentný počet šumových elektrónov $N_n = Q_n / e$,
- **pološírku píku $FWHM = 2,35\sigma$** (Full width at Half Maximum - celkovou šírkou píku meranou na polovičnej výške), ktorá súvisí so strednou kvadratickou

odchýlkou energie meraného píku $\sigma = \sqrt{\frac{N_n}{\omega}}$ [meranou v jednotkách eV].

Optimálne nastavenie časových konštánt tvarovania $\tau_i = \tau_o = \tau$ v zosilňovači možno určiť zo vzťahu pre minimum Q_n . V prípade použitia výsledku z príkladu 5-9 vyplýva z podmienky:

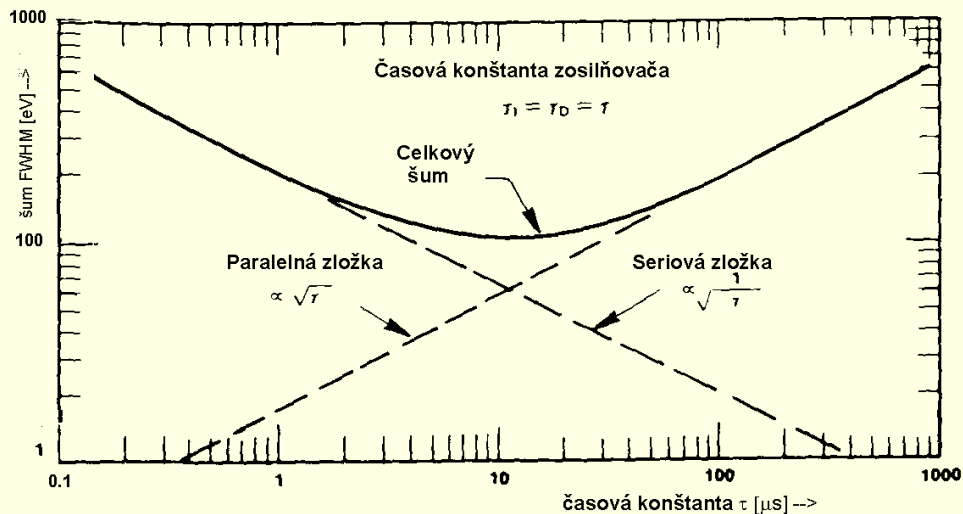
$$\frac{\delta Q_n}{\delta \tau} = 0 \text{ optimum } \tau_o = C \sqrt{R_p R_s}$$

Pri tejto optimálnej tvarovacej konštante je minimálny šumový náboj:

$$Q_{n_min} = \sqrt{kTC} \sqrt{\frac{R_s}{R_p}}$$

V skutočnosti si je treba experimentálne overiť vhodnosť voľby časových konštánt tvarovania. Napr. pre polovodičový barierový Si detektor môže byť $\tau \sim 0,5\mu\text{s}$ až $1\mu\text{s}$, pre Ge alebo Si(Li) detektor $\tau \sim 6\mu\text{s}$ až $20\mu\text{s}$. Priebeh na obr. 5-7 je príkladom experimentálneho overenia závislosti šumového náboja (FWHM) od voľby časovej konštanty tvarovania τ . Súčasne tiež ilustruje existenciu minima šumu pri optimálnej

voľby časovej konštanty τ_0 tvarovacích CR - RC článkov. Pri menších konštantách tvarovania $\tau < \tau_0$ prevláda sériová zložka (vlastnosti JFETu), pri $\tau > \tau_0$ je zase rozhodujúca paralelná zložka šumu (vlastnosti detektora).



Obr. 5-7

Experimentálna ilustrácia závislosti celkového šumu v experimente s Si(Li) detektorom od tvarovania s časovou konštantou $\tau_i = \tau_d = \tau$.

V reálnom detektore ionizujúceho žiarenia kapacita $C = C_{vs} + C_{dd} + C_m$ pozostáva zo vstupnej kapacity zosilňovača C_{vs} , z montážnej kapacity C_m prepojenia detektor – zosilňovač a z vlastnej kapacity detektora C_{dd} . Pri odpojenom detektore od zosilňovača je kapacita $C = C_{vs}$ minimálna, nakoľko časť kapacity $C_{dd} + C_m$ závisí od pripojeného detektora. Podobne aj ekvivalentný šumový náboj Q_n sa rozdelí na 2 zložky:

$$Q_n = Q_{n0} + \frac{\delta Q_n}{\delta C} \cdot C_d;$$

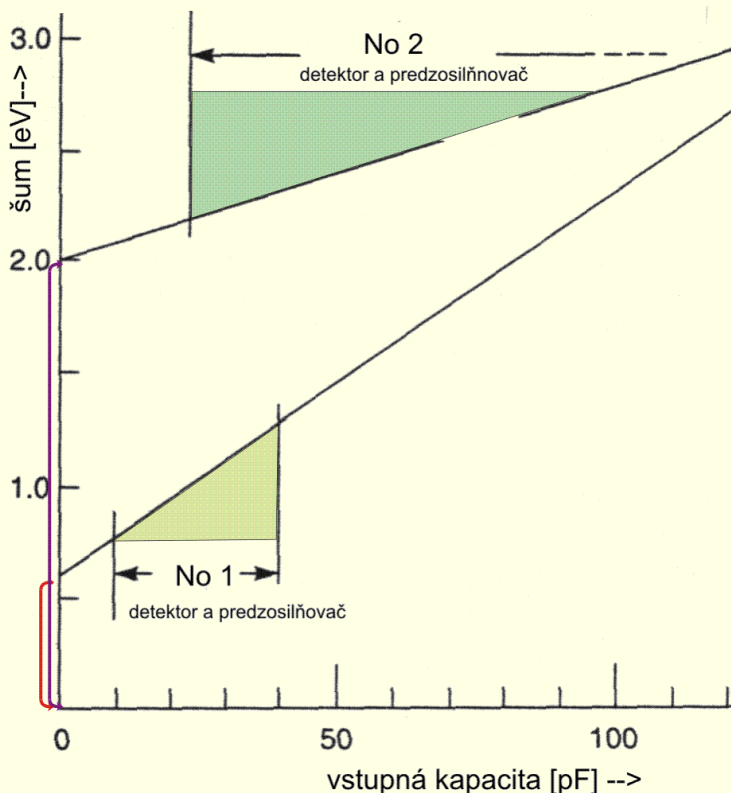
- časť, závislú od vonkajšej kapacity detektora C_d ;
- čas, nezávislú od vonkajšej kapacity.

Poprípade túto závislosť možno vyjadriť v ekvivalentom počte šumových elektrónov $N_n = Q_n/e$

$$N_n = N_{n0} + \frac{\delta N_n}{\delta C} \cdot C_d.$$

Konštantná časť N_{n0} resp. Q_{n0} charakterizuje vlastnosti zosilňovača a prírastok dN_n/dC , resp. dQ_n/dC je prístrojová konštanta, najčastejšie pre praktické aplikácie udávaný v tvare grafickej závislosti, podobnej obr. 5-8. Základné rozlíšenie $FWHM_0$ na obr. 5-8 charakterizuje šírku píku bez pripojeného detektora, t.j. šumové vlastnosti predzosilňovača. Pri použití polovodičového detektora by mal byť prírastok $\Delta FWHM/\Delta C$ čo najmenší, aby sa len minimálne mohla prejaviť závislosť kapacity polovodičového detektora od jeho napájacieho napätia. Kapacita detektora nezmenšuje teda len amplitúdu napätia, ale zhoršuje aj presnosť merania energie.

Zložky tepelného šumu možno zmenšiť pomocou chladenia detektora (v prípade Ge detektorov sa umiestňuje vstupný FET spolu s detektorom a ochladzuje sa tekutým dusíkom). "Ružový" šum typický pre FET sa dá zmenšiť individuálnym výberom vstupného tranzistora.



Obr. 5-8.

Závislosť šumu $FWHM = FWHM_0 + C_d(\Delta FWHM/\Delta C)$ na výstupe predzosilňovača v závislosti od kapacity C_d detektora, pre 2 typy detektorov. Základné rozlíšenie $FWHM_0$ charakterizuje šírku píku bez pripojeného detektora, t.j. šumové vlastnosti zosilňovača.

Príklad 5-10

Určite optimálnu veľkosť tvarovacej konštanty zosilňovača $\tau_i = \tau_d = \tau_0$, pre polovodičový detektor s kapacitou $C = 15 \text{ pF}$ a pracovným odporom $R = 1 \text{ G}\Omega$, ktorý je pripojený k tomuto zosilňovaču. Prúd cez polovodičový detektor $I_d = 0,1 \text{ nA}$, strmosť vstupného JFETu $g_m = 15 \text{ mA/V}$ pri teplote $T = 300 \text{ K}$. (Boltzmannova konštantka $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$, náboj elektrónu $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$).

Riešenie:

Optimálna rozlišovacia schopnosť aparatury, pozostávajúcej z detektora a zosilňovača, bude pri tvarovacej konštante $\tau_0 = C\sqrt{R_p \cdot R_s}$. Po stanovení R_p a R_s bude hľadaná časová konštantka

$$R_p = \frac{R}{1 + \frac{2eI_d R}{2kT}} = 200 \text{ M}\Omega; \quad R_s = \frac{2}{3g_m} = 44 \Omega;$$

$$\tau_0 = 1,4 \mu\text{s}.$$

5.2.5 Vplyv šumu na energetické rozlíšenie

Ako výsledok zložitého procesu interakcie žiariča s náplňou detektora vzniká v detektore súbor nosičov náboja (elektrón - kladný ión v plynovom detektore, elektrón- diera v polovodičovom detektore). Keď nabitá častica v pracovnom

priestore detektora stratila energiu ΔW a stredná energia potrebná na vytvorenie jedného páru je ω , potom priemerný počet párov, vytvorených jednou časticou bude $N=\Delta W/\omega$ a v objeme detektora sa vytvoril elektrický náboj jedného znamienka $Q_S=e\Delta W/\omega$.

Ak má byť elektrický signál úmerný energii žiarenia, ktoré bolo odovzdané náplni detektora, je nutné zozbierať všetok náboj z objemu detektora bez strát. Treba preto pripojiť k elektródam detektora dostatočne vysoké pracovné napätie. Náboj zozbieraný na elektródach detektora treba premeniť na signál, ktorý možno zosilniť a v ďalšom spracovať elektronickými obvodmi. Obvykle sa k detektoru pripája nábojový predzosilňovač a zosilňovač s amplitúdovým analyzátorom. Amplitúda napätových elektrických impulzov z výstupu zosilňovača je potom úmerná energii žiarenia, interagujúceho s náplňou detektora.

Na kvalitu činnosti spektrometrickej aparatúry s detektorom vplývajú dva základné zdroje fluktuácií:

- Rozptyl hodnoty úhrnného náboja ,
- Šum vstupných obvodov predzosilňovača a obvodu samotného detektora ($FWHM_{el}$).

5.2.5.1 Rozptyl úhrnného náboja

Rozptyl hodnoty úhrnného náboja, ktorý vznikol pri absorpcii žiarenia limituje vlastnú energetickú schopnosť detektora, charakterizovanú strednou kvadratickou odchýlkou energie σ_N , resp. polovičnou šírkou krivky amplitúdového rozdelenia $FWHM=2,35\sigma_N$, meranou v polovičnej výške tohto rozdelenia:

$$FWHM_{det} = 2,35\sqrt{F \cdot \Delta E / \omega \cdot \omega} = 2,35\sqrt{F \cdot \Delta E \cdot \omega};$$

$$\sigma_N = \sqrt{F \cdot N}.$$

Vo vzťahu vystupuje tzv. Fanov faktor F, ktorý charakterizuje odchýlku strednej kvadratickej odchýlky celkového počtu uvoľnených nosičov náboja od Poissonovho rozdelenia ($F=1$, pre polovodičové detektory $F=0,1$ až $0,2$).

5.2.5.2 Šum predzosilňovača

Šum vstupných obvodov predzosilňovača a obvodu samotného detektora ($FWHM_{el}$) prispieva k ďalšiemu rozšíreniu zvonovitého tvaru spektrálnej čiary. Vzhľadom na to, že oba zmienené zdroje šumu zodpovedajú štatisticky nezávislým dejom, bude výsledné rozlíšenie spektrometrického zariadenia charakterizované šírkou:

$$FWHM_{celk} = \sqrt{FWHM_{det}^2 + FWHM_{el}^2}.$$

Príklad 5-11

Určite energetické rozlíšenie germániového detektora s celkovou kapacitou $C_d=10\text{pF}$ pri meraní monoenergetických častíc s energiou $\Delta W=1,33\text{MeV}$. Stredná energia na vytvorenie jedného páru elektrón- diera $\omega=2,95\text{eV}$ a Fanov faktor $F\sim 0,1$. Šum vstupného obvodu elektroniky je aproximovaný vzťahom $FWHM=0,7\text{keV}+(20\text{eV/pF}) \cdot C_d$.

Riešenie:

Vlastná rozlišovacia schopnosť detektora je charakterizovaná šírkou:

$$FWHM_{det} = 2,35\sqrt{F \cdot \Delta E \cdot \omega} = 2,35\sqrt{0,1 \cdot 1,33 \cdot 10^6 \cdot 2,95} = 1,48\text{keV};$$

Šum elektroniky $FWHM_{el}=700+20 \cdot 10=900\text{eV}$, takže výsledné energetické rozlíšenie:

$$FWHM = \sqrt{FWHM_{det}^2 + FWHM_{el}^2} = \sqrt{1,48^2 + 0,9^2} = 1,73\text{keV}.$$

Príklad 5-12

Porovnajete energetické rozlíšenie spektrometrického zariadenia, v ktorom je detektorom ionizačná komora s mriežkou (náplň argon s prímiesou metánu, takže stredná energia na vytvorenie páru elektrón – kladný ión $\omega_A=27\text{ eV}$) a zariadenia s kremíkovým detektorom (stredná energia na vytvorenie páru elektrón – diera $\omega_S=3,62\text{ eV}$) o rovnakej kapacite $C_d=80\text{pF}$. V kapacite C_d sú už zahrnuté aj montážne kapacity, kapacita spojov a vstupná kapacita zosilňovača. Obidva detektory majú rovnaké pracovné odpory a sú pripojené k rovnakému predzosilňovaču, ktorého šum je definovaný vzťahom: $FWHM_{el}=1,5\text{eV}+(0,02\text{keV/pF})C_d \cdot s$.

Koeficient $s=1$ pre kremíkový detektor a $s=\omega_A/\omega_S$ pre ionizačnú komoru. Určite energetické rozlíšenie pri meraní monoenergetických alfa častíc s energiou $5,48\text{MeV}$, ktoré sú emitované nuklidom ^{241}Am .

Riešenie:

1) Fyzikálna“ rozlišovacia schopnosť

V dôsledku procesu interakcie častice alfa s médiom detektora (následkom štatistického javu transformácie energie častice na amplitúdu impulzu v detektore), za predpokladu, že N podlieha Poissonovmu rozdeleniu, resp. je korigované Fanovým faktorom F je „fyzikálna“ rozlišovacia schopnosť:

- kremíkového detektora ($F=0,1$) určená šírkou $FWHM_{Si}=2,35$. $(F \cdot \Delta W \cdot w_S)^{0,5}=3,3\text{keV}$
- ionizačnej komory ($F=1$) určená šírkou $FWHM_{IKd}=2,35$. $(F \cdot \Delta W \cdot w_S)^{0,5}=28,7\text{keV}$

2)Príspevok šumov detektora a elektroniky

Fluktuácia šumových impulzov detektora a príspevok vlastných šumov predzosilňovača charakterizovaná

- pri kremíkovom detektore šírkou $FWHM_{elS}=1,5+0,02 \cdot 80=3,1\text{keV}$
- pri ionizačnej komore šírkou $FWHM_{elA}=1,5+0,02 \cdot 80 \cdot (27/3,62)=23,1\text{keV}$

3)Energetický ekvivalent šumu celého spektrometrického kanálu

Výsledná fluktuáciu amplitúdového rozdelenia impulzov je dôsledok štatistického procesu interakcie častice alfa s médiom detektora, ako aj dôsledok fluktuácie šumových impulzov detektora a príspevku vlastných šumov predzosilňovača a zosilňovača. Výsledná fluktuácia

- pri kremíkovom detektore šírkou $FWHM_{celkSi} = (3,3^2 + 3,1^2)^{0,5} = 4,52\text{keV}$
- pri ionizačnej komore šírkou $FWHM_{celkIK} = (28,7^2 + 23,1^2)^{0,5} = 36,8\text{keV}$

Pomerné energetické rozlíšenie $\eta = (FWHM)/\Delta W$ pre:

- kremíkový detektor $\eta_{Si} = (FWHM_{celkSi})/\Delta W = 4520 / (5,48 \cdot 10^6) = 0,082\%$
- ionizačnú komoru $\eta_{IK} = (FWHM_{celkIK})/\Delta W = 36800 / (5,48 \cdot 10^6) = 0,67\%$

KONTROLNÉ OTÁZKY

- Objasnite kedy je vhodnejšie na charakterizovanie štatistických neistôt náhodných javov použiť Poissonovo a kedy Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti ?
- Na zvýšenie dôveryhodnosti merania uprednostňujete predĺženie merania alebo zopakovanie merania?
- Objasnite v čom spočíva problém merania početností na úrovni pozadia?
- Prečo je nesprávne hovoriť o šumovom napätí ale radšej o šumovom výkone?
- Zmysel pojmu - ekvivalentný šumový náboj?
- Čo treba robiť na to, aby bol pomer signál/ šum v spektrometrickej aparatúre optimálny?
- Ako možno voľbou vhodnej časovej konštanty ovplyvniť veľkosť šumu v zosilňovači?

8. Ako charakterizuje spektrálna hustota šum?

9. Aké vlastnosti má „biely“ a „ružový“ šum ?

10. Objasnite podiel „paralelnej“ a „sériovej“ zložky náhradného obvodu k šumu?

SÚHRN

Pri detekcii ionizujúceho žiarenia sa vyskytuje rozptyl nameraných hodnôt, ktorý spôsobuje pravdepodobnostný charakter rádioaktívneho rozpadu jadier ako aj pravdepodobnostný charakter procesu interakcie žiarenia s médiom detektora. Presnosť výsledku možno zvýšiť predĺžením trvania merania alebo zopakovaním počtu meraní, Pri meranie vzorky a pozadia sa obvykle dosiahne vyššia presnosť ak sa použije rôzne dlhý interval merania. Pri interpretácii výsledkov merania záleží na našom rozhodnutí na akej úrovni odhadu výsledky uvádzame, resp. od toho koľko nás bude stáť mylný odhad alebo jeho dôsledky. Štatistika hovorí len s akou pravdepodobnosťou je daný typ hodnotenia spoľahlivosti správny.

Šumové fluktuácie napätí a prúdov sa superponujú na napätia a prúdy, tvoriace sledovaný signál s užitočnou informáciou, prípadne sa aj ďalej zosilňujú súčasne so signálom a tým zhoršujú presnosť merania. Amplitúda šumových fluktuácií by mala byť značne menšia, ako je amplitúda sledovaného signálu. Šum vzniká následkom štatistického javu transformácie energie častice na amplitúdu impulzu v procese interakcie žiarenia s médiom detektora a tiež ako príspevok tepelného, výstrelového alebo blikavého šumu vo vstupných elektronických obvodoch. Jednotlivé zložky šumu prispievajú k výslednému šumu detektora so zosilňovačom, úmerne šírke pásma priepustnosti zosilňovača, ktorý zosilňuje signál z detektora. Pomer signál / šum možno optimalizovať pomocou voľby vysokého pracovného odporu detektora, pomocou voľby minimálneho vstupného prúdu cez detektor a predzosilňovač, vhodnou voľbou unipolárneho tranzistora s veľkou strmou a vhodnou voľbou integračnej a derivačnej časovej konštanty zosilňovača, Šum má nulovú strednú hodnotu a možno ho charakterizovať len pomocou strednej kvadratickej hodnoty. Na porovnávanie veľkosti šumu možno použiť ekvivalentný šumový náboj, ktorý na výstupe detektora vytvorí existujúcu strednú kvadratickú hodnotu šumového napätia.



Návrat z acrobat readera -  (zatvorením okna)