



FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
BRATISLAVA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
BRATISLAVA

Katedra jadrovej fyziky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

**Štúdium stability základného stavu jadra
v rámci protón-neutrónového Lipkinovho
modelu**

František Knapp

Ďakujem svojmu školiťovi RNDr. Fedorovi
Šimkovicovi, CSc. za všestrannú pomoc
a podnetné pripomienky pri tvorbe tejto
práce.

Prehlasujem, že som predkladanú diplomovú
prácu vypracoval samostatne s pomocou uve-
denej literatúry.

Obsah

1	Dvojitý beta rozpad a štruktúra jadra	5
2	Schématické jadrové modely	10
2.1	Lipkinov model	10
2.2	Protón-neutrónový Lipkinov model	11
3	Kvázičasticové priblíženie náhodných fáz (QRPA)	15
3.1	Formalizmus QRPA metódy	15
3.2	QRPA s optimálnym základným stavom	17
4	Semiklasický opis jadrového systému	23
4.1	Semiklasický prístup vo fermiónovom priestore	23
4.2	Semiklasický prístup v bozónovom priestore	25
5	Numerická aplikácia metód	27
5.1	Riešenia v QRPA s optimálnym základným stavom	27
5.2	Semiklasický výpočet	29
5.3	Stredné hodnoty počtu kvázičastíc	30
5.4	Amplitúdy Fermiho β prechodov	30
5.5	Ikedovo sumačné pravidlo	32
5.6	Maticový element $2\nu\beta\beta$ prechodu	33
6	Záver	40
A	Bogoliubov-Valatinova transformácia	43
B	Marumoriho mapovanie	45
C	Maticové elementy	47
	Literatúra	50

1 Dvojitý beta rozpad a štruktúra jadra

Jednou z hlavných úloh teoretickej jadrovej fyziky je opis štruktúry atómového jadra. V jadrovej fyzike je mnohokrát veľmi ťažké dosiahnuť spoľahlivé predpovede plynúce z teórie, pretože jadrá predstavujú komplikované mnohonukleónové systémy a poznatky o nukleón-nukleónovej interakcii nie sú dostačujúce. Pri budovaní jadrových modelov sa nezaobídeme bez priblížení, ktorých dôsledky nie vždy poznáme. Vývoj nových výpočtových metód a štúdium ich ohraničení je preto dôležitou súčasťou teoretického výskumu.

Významným stimulom pre štúdium nových výpočtových prístupov je dvojitý beta ($\beta\beta$) rozpad. Tento proces v posledných rokoch priťahuje pozornosť teoretikov i experimentátorov, pretože je zaujímavý nielen z pohľadu jadrovej fyziky, ale najmä fyziky elementárnych častíc.

Rozlišujeme dva módy $\beta\beta$ rozpadu: **dvojneutrínový** a **bezneutrínový**. Bezneutrínový $\beta\beta$ rozpad je mimoriadne citlivým testom základných symetrií Štandardného modelu ako sú zákon zachovania leptónového čísla, otázka nenulovej hmotnosti neutrína a existencia pravotočivých slabých prúdov.

Pri dvojneutrínovom $\beta\beta$ rozpade ($2\nu\beta\beta$) sú emitované dva elektróny a dve antineutrína.

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e.$$

Je to slabý proces druhého rádu, ktorý predstavuje povolený rozpadový mód pre približne 30 páro-párnych jadier [4]. Párovacia interakcia medzi nukleónmi spôsobuje, že páro-párne jadro je stabilnejšie ako susedný nepáro-párny izobar. Jednoduchý β prechod je v takom prípade energeticky zakázaný a jediným možným rozpadovým kanálom je $2\nu\beta\beta$ prechod (obr.1). $2\nu\beta\beta$ rozpad predpovedala M. Goeppert-Mayer v roku 1935 [8], teda krátko po tom, čo E. Fermi prezentoval svoju teóriu β rozpadu (1934).

Dvojneutrínový mód nenarušuje zachovanie leptónového náboja a je dovolený v rámci Štandardného modelu elektroslabých interakcií (ŠM) Glashowa [5], Weinberga [6], Salama [7]. Experimentálne bol $2\nu\beta\beta$ rozpad potvrdený napr. pre prechody $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$, $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$, $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$. Polčasy $2\nu\beta\beta$ rozpadov

sa pohybujú v rozmedzí $10^{19} - 10^{24}$ rokov ($T_{1/2}^{2\nu\beta\beta}[{}^{76}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}\text{Se}] = 1.77 \times 10^{21} \text{ r}$), t.j. jedná sa o najzriedkavejšie procesy pozorované v prírode.

Možnosť existencie bezneutrínového $\beta\beta$ rozpadu ($0\nu\beta\beta$) bola predpovedaná W.Furym v roku 1939 [21]. V danom móde sú emitované iba dva elektróny.

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + 2e^-.$$

Leptónový náboj sa v tomto prípade nezachováva, čo ŠM neumožňuje. Bezneutrínový mód je možný, iba ak je neutríno majoranovskou časticou s nenulovou hmotnosťou. Štúdium $0\nu\beta\beta$ rozpadu je stimulované vývojom Teórií veľkého zjednotenia (GUT's¹), ktoré predpovedajú existenciu tohto procesu ako dôsledok slabého narušenia zákona zachovania leptónového náboja. $0\nu\beta\beta$ rozpad nebol zatiaľ experimentálne potvrdený, sú známe len dolné ohraničenia pre polčasy rozpadov [4]. Najsilnejšie ohraničenie pre polčas $0\nu\beta\beta$ rozpadu bolo stanovené Heidelberg-Moskovskou kolaboráciou v prípade ${}^{76}\text{Ge}$ ($T^{0\nu\beta\beta} \geq 1.1 \times 10^{25} \text{ r}$) [9].

Z hľadiska jadrovej štruktúry predstavuje $2\nu\beta\beta$ rozpad prostriedok pre experimentálne overenie presnosti rôznych metód pre výpočet jadrových maticových elementov. Pre prevrátenú hodnotu polčasu $2\nu\beta\beta$ rozpadu platí [4]

$$[T_{1/2}^{2\nu\beta\beta}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = G^{2\nu\beta\beta} |M_{GT}^{2\nu\beta\beta}|^2.$$

Kinematický faktor $G^{2\nu\beta\beta}$ zahŕňa integráciu cez fázový priestor vyletujúcich leptónov a nezávisí od neznámych parametrov fyziky elementárnych častíc [4]. Pre výpočet Gamow-Tellerovho maticového elementu $M_{GT}^{2\nu\beta\beta}$ je potrebné poznať úplný systém stavov prechodového jadra. Porovnanie teoreticky určeného polčasu rozpadu s experimentálnou hodnotou umožňuje posúdiť spoľahlivosť použitej výpočtovej metódy.

Pre výpočet maticových elementov $\beta\beta$ rozpadu sa v súčasnosti najviac používajú rôzne varianty **kvázičasticového priblíženia náhodných fáz** (QRPA²).

Štandardná QRPA metóda je založená na dvoch aproximáciách:

1. Vzbudený stav jadra je opísaný fonónovým operátorom, ktorý obsahuje lineárne kombinácie súčinov dvoch kreačných a dvoch anihilačných kvázičasticových operátorov.

¹Grand Unified Theories

²Quasiparticle Random Phase Approximation

2. Komutátor bifermiónových operátorov sa nahrádza jeho strednou hodnotou v BCS³ vákuu, čoho dôsledkom je, že bifermiónové operátory sa správajú ako bozónové (*kvázibozónová aproximácia*).

Spôľahlivosť *standardnej QRPA* je otázna, pretože získané riešenia citlivo závisia od parametra g_{pp} , ktorý renormalizuje reziduálnu časticovo-časticovú interakciu jadrového hamiltoniánu. Vo fyzikálnej oblasti tohto parametra ($g_{pp} \approx 1$ pre realistickú interakciu) riešenia navyše kolabujú [15] a uvedenej hodnote g_{pp} zodpovedá nulový polčas $2\nu\beta\beta$ rozpadu. Tieto skutočnosti znižujú predpovednú schopnosť teórie v oblasti veľkých hodnôt časticovo-časticovej interakcie. Predpokladá sa, že príčinou kolapsu riešení v *standardnej QRPA* je narušenie Pauliho vylučovacieho princípu, ktoré má pôvod práve v *kvázibozónovej aproximácii*.

Renormalizovaná QRPA metóda [13] berie Pauliho vylučovací princíp čiastočne do úvahy. Približné splnenie Pauliho vylučovacieho princípu nie je ale postačujúce pre realistické výpočty vo veľkých modelových priestoroch. Často diskutovaným nedostatkom *renormalizovanej QRPA* je narušenie Ikedovho sumačného pravidla [14].

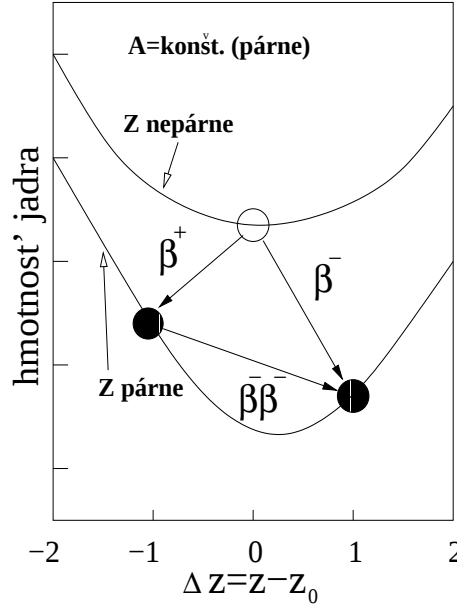
Ohraničenia jednotlivých QRPA metód sa intenzívne študujú pomocou schématických jadrových modelov [14, 16, 17, 27]. Výhodou schématických modelov je, že poznáme exaktné riešenia (nájdene diagonalizáciou hamiltoniánu), čo nám umožňuje analyzovať dôsledky použitých priblížení pomocou porovnania QRPA riešení s presnými hodnotami.

Pre štúdium modifikácií QRPA, ktoré sa používajú pri opise β a $\beta\beta$ prechodov, sa ukázal ako vhodný tzv. *protón-neutrónový Lipkinov schématický model*, ktorý kvalitatívne dobre simuluje výsledky realistických výpočtov [25, 26].

Pre *protón-neutrónový Lipkinov model* bolo nájdene QRPA riešenie s exaktným splnením Pauliho vylučovacieho princípu (QRPA-EPP) [16]. Presné zahrnutie Pauliho vylučovacieho princípu viedlo k potlačeniu citlivosti riešení na hodnote časticovo-časticovej interakcie a lepšiemu súhlasu s exaktnými výsledkami získanými diagonalizáciou hamiltoniánu.

Formalizmus, ktorý presne spĺňa Pauliho vylučovací princíp je možné aplikovať iba na jednoduché schématické modely, pretože pre realistické hamil-

³Bardeen Cooper Schrieffer

Obr. 1: Schéma $\beta\beta$ rozpadu.

toniány nepoznáme presné analytické vyjadrenia RPA vlnových funkcií. Problém je riešiteľný prostredníctvom formulácie celej teórie v bozónovom priestore. Výpočty v bozónovom priestore sú jednoduchšie a Pauliho vylučovací princíp môžeme do teórie zahrnúť pomocou bozónového mapovania hamiltoniánu a prechodových β operátorov.

Originálny prístup k opisu mnohonukleónovej sústavy predstavuje nedávno publikovaná *QRPA s optimálnym základným stavom (QRPA-OGS)* [18]. Ide o prvý pokus spojiť riešenie QRPA rovníc s variačným opisom základného stavu. Metóda je formulovaná v bozónovom priestore a Pauliho vylučovací princíp je tu zahrnutý prostredníctvom bozónového mapovania jadrového hamiltoniánu. V rámci tejto metódy sa podarilo nájsť **nové riešenia za bodom kolapsu štandardnej QRPA**. Ukázalo sa, že niektoré nové módy v oblasti za kolapsom zodpovedajú harmonickým osciláciám okolo základného stavu jadrového systému, ktoré boli nájdené pomocou *Semiklasického prístupu* [17].

Spôsob a presnosť opisu jadrového hamiltoniánu a β operátorov v bozónovom priestore má v QRPA výpočtoch zásadný význam, pretože určuje do akej miery dochádza k narušeniu Pauliho vylučovacieho princípu.

V predkladanej práci analyzujeme ohraničenia vyplývajúce z neúplnosti bozónového mapovania jadrového hamiltoniánu a β operátorov v nasledujúcich metódach:

- QRPA s optimálnym základným stavom (QRPA-OGS)
- Semiklasický opis mnohonukleónového systému

Obidve metódy študujeme v rámci *protón-neutrónového Lipkinovho modelu*. V práci sú prvýkrát odvodené analytické výrazy potrebné pre výpočet s presnejším bozónovým mapovaním jadrového hamiltoniánu. Taktiež prvýkrát je prevedený semiklasický výpočet v bozónovom priestore s použitím Marumoriho mapovacieho predpisu [20].

Jednou z hlavných motivácií práce je súvis mapovania jadrového hamiltoniánu s otázkou existencie nových QRPA-OGS riešení, za bodom kolapsu *štandardnej QRPA*. Je otázne, či lepší opis hamiltoniánu v bozónovom priestore povedie k ďalším novým riešeniam, alebo len k spresneniu pôvodných.

Štúdium daného problému je dôležité aj pre pochopenie spontánneho narušenia symetrie základného stavu, ku ktorému dochádza pri veľkých hodnotách časticovo-časticovej interakcie.

Získané vlnové funkcie sú použité na výpočet nasledujúcich fyzikálnych charakteristík: stredný počet kvázičastíc v základnom a excitovanom stave, maticové elementy β a $\beta\beta$ prechodov, splnenie Ikedovho sumačného pravidla.

2 Schématické jadrové modely

Realistické výpočty vlnových funkcií mnohonukleónových sústav predstavujú zložitý numerický problém. Pre porovnanie rôznych aproximačných metód sa výpočty robia na schématických modeloch. Pre schématické modely sú zvyčajne známe vlastné stavy nájdené diagonalizáciou hamiltoniánu, čo umožňuje porovnať výsledky získané pomocou študovanej metódy s presnými hodnotami. Schématické hamiltoniány neopisujú vlastnosti konkrétnych jadier, ale vykazujú podobné fyzikálne charakteristiky ako majú hamiltoniány používané v realistických výpočtoch.

2.1 Lipkinov model

V roku 1965 Lipkin, Meshkov a Glick (LMG) [19] navrhli jednoduchý model, ktorý je dodnes široko používaný pri testovaní mnohonukleónových teórií [34] - [40].

Predpokladajme dve vrstvy, ktoré majú rovnakú hodnotu celkového uhlového momentu j , pričom jedna vrstva leží nad a druhá pod Fermiho úrovňou (obr. 2). Každá z vrstiev je $\Omega = 2j + 1$ krát degenerovaná. Ak uvažujeme systém s počtom častíc Ω , potom v rámci tohto modelu existuje 2^Ω konfigurácií. LMG hamiltonián má tvar

$$H = \epsilon K_0 - \frac{1}{2} V (K_+ K_+ + K_- K_-), \quad (1)$$

pričom sme zaviedli tzv. kvázispinové operátory

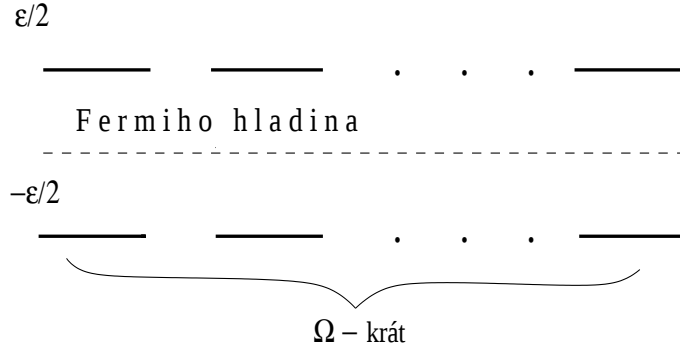
$$K_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\Omega} (a_{+m}^\dagger a_{+m} - a_{-m}^\dagger a_{-m}), \quad K_+ = \sum_{m=1}^{\Omega} a_{+m}^\dagger a_{-m}, \quad K_- = (K_+)^\dagger.$$

Operátory $a_{+m}^\dagger, a_{-m}^\dagger$ reprezentujú vytvorenie častice v hornej resp. dolnej vrstve, ϵ je rozdiel energií medzi týmito hladinami.

Stav nukleónu je charakterizovaný dvomi kvantovými číslami: $s = +/ -$ udáva, či sa nukleón nachádza v hornej alebo dolnej vrstve a m je priemet uhlového momentu na zvolenú os. Interakcia medzi nukleónmi v dolnej a hornej vrstve V nezávisí od žiadneho z kvantových čísel s, m .

Operátory $K_0, K_\pm$ spĺňajú komutačné vzťahy

$$[K_+, K_-] = 2K_0, \quad [K_0, K_\pm] = \pm K_\pm,$$



Obr. 2: Hladiny v Lipkinovom modeli

a sú generátormi $SU(2)$ algebry. Jedna z posledných prác zaoberajúca sa hľadaním presných riešení v rámci LMG modelu je [41].

2.2 Protón-neutrónový Lipkinov model

Pre účely testovania rôznych variánt QRPA a jej aplikovanie na výpočet maticových elementov β a $\beta\beta$ rozpadu sa v súčasnosti používa protón-neutrónový Lipkinov model. Uvedený model dobre napodobňuje QRPA výsledky amplitúd β prechodov pre realistické hamiltoniány, ktoré obsahujú elementy G -matice počítanej s použitím Bonn-OBEP potenciálu (One Boson Exchange Potential) [25, 26].

Model je odvodený z hamiltoniánu, ktorý v časticovej reprezentácii pozostáva z jednočasticového člena, protón-protónovej, neutrón-neutrónovej párovacej interakcie a reziduálnej interakcie typu častica-častica (p - p)⁴, častica-diera (p - h)⁵.

$$H = H_p + H_n + H_{res}. \quad (2)$$

$$H_p = e_p \sum_m a_{pm}^\dagger a_{pm} - G_p S_p^\dagger S_p, \quad H_n = e_n \sum_m a_{nm}^\dagger a_{nm} - G_n S_n^\dagger S_n, \quad (3)$$

$$H_{res} = 2\chi \beta^- \cdot \beta^+ - 2\kappa P^- \cdot P^+.$$

V rovniciach (3) sme zaviedli označenia

$$S_p^\dagger = \frac{1}{2} \sum_m a_{pm}^\dagger \tilde{a}_{pm}^\dagger, \quad S_n^\dagger = \frac{1}{2} \sum_m a_{nm}^\dagger \tilde{a}_{nm}^\dagger,$$

⁴particle-particle

⁵particle-hole

$$\begin{aligned}\beta^- &= \sum_m a_{pm}^\dagger a_{nm}, & P^- &= \sum_m a_{pm}^\dagger \tilde{a}_{nm}^\dagger \\ \beta^\dagger &= (\beta^-)^\dagger, & P^\dagger &= (P^-)^\dagger.\end{aligned}$$

Operátor $a_{\tau m}^\dagger \equiv a_{j_\tau m_\tau}^\dagger$ ($\tau = p, n$) je časticový kreačný operátor, reprezentujúci vytvorenie protónu ($\tau = p$) alebo neutrónu ($\tau = n$) s uhlovým momentom j_τ a priemetom na zvolenú os m_τ , $a_{\tau m} = (a_{\tau m}^\dagger)^\dagger$ je časticový anihilačný operátor a $\tilde{a}_{\tau m}^\dagger \equiv (-1)^{j_\tau - m_\tau} a_{j_\tau - m_\tau}^\dagger$ označuje časovo reverzný stav.

Parametre χ, κ odpovedajú v literatúre štandardne používaným parametrom g_{ph}, g_{pp} , ktoré renormalizujú realistickú p - h a p - p interakciu [10, 11, 12].

Hamiltonián (2) opisuje systém s $J = 0$, preto v uvažovanom modeli existujú iba β prechody Fermiho typu ($\Delta J = 0, \Delta T = \pm 1$).

Predpokladáme, že nukleóny sa pohybujú iba v jednej vrstve s uhlovým momentom $j_p = j_n \equiv j$ a párovacia interakcia je rovnaká pre protóny aj neutróny, t. j. $G_p = G_n = G$.

Zavedením Bogoliubov-Valatinovej transformácie separátne pre protóny a neutróny,

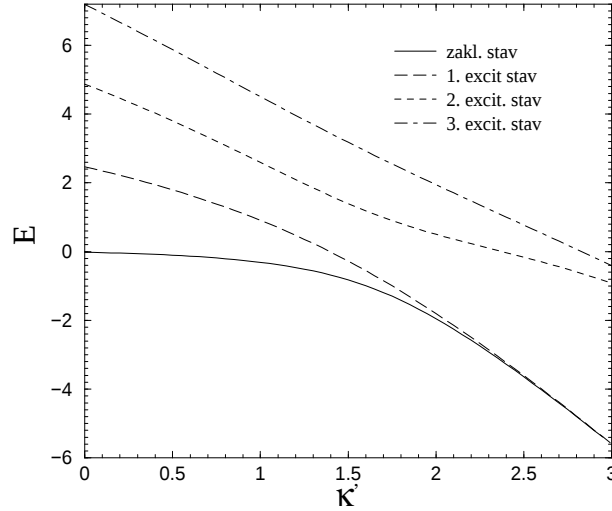
$$\begin{pmatrix} \alpha_{\tau m}^\dagger \\ \tilde{\alpha}_{\tau m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\tau & -v_\tau \\ v_\tau & u_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau m}^\dagger \\ \tilde{a}_{\tau m} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

a následnou BCS diagonalizáciou (viď. *dodatok A*) dostaneme z (2) kvázičasticový hamiltonián

$$\begin{aligned}H &= \epsilon_p \sum_{m_p} \alpha_{pm_p}^\dagger \alpha_{pm_p} + \epsilon_n \sum_{m_n} \alpha_{nm_n}^\dagger \alpha_{nm_n} \\ &+ 2\chi(2j+1) [(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) A^\dagger A + u_p v_n v_p u_n A^\dagger A^\dagger + v_p u_n u_p v_n A A] \\ &- 2\kappa(2j+1) [(u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2) A^\dagger A - u_p u_n v_p v_n A^\dagger A^\dagger - v_p v_n u_p u_n A A].\end{aligned} \quad (5)$$

Operátory $\alpha_{\tau m}^\dagger, \alpha_{\tau m}$ definované transformáciou (4) sú kreačné resp. anihilačné kvázičasticové operátory a ϵ_p, ϵ_n sú energie kvázičastíc pre protóny a neutróny. Pre amplitúdy u_τ, v_τ platia vzťahy: $v_\tau = \sqrt{N_\tau/2\Omega}$, $u_\tau = \sqrt{1 - N_\tau/2\Omega}$, N_p označuje počet protónov, N_n počet neutrónov a 2Ω je degenerácia uvažovanej vrstvy, $2\Omega = 2j + 1$ (viď. *dodatok A*).

Pri odvádzaní (5) sme zanedbali rozptylové členy typu $\alpha_p^\dagger \alpha_n$ a $\alpha_n^\dagger \alpha_p$ a zaviedli bifermiónový operátor $A^\dagger = [\alpha_p^\dagger \otimes \alpha_n^\dagger]_{M=0}^{J=0}$. Ak predpokladáme rovnaké energie



Obr. 3: *Energie prvých 4 stavov protón-neutrónového Lipkinovho modelu nájdené diagonalizáciou hamiltoniánu v závislosti od hodnoty časticovo-časticovej interakcie κ' . Parametre modelu sú zvolené nasledovne: $N = 4$, $Z = 6$, $j = 9/2$, $\chi' = 0.5 \text{ MeV}$, $\epsilon = 1 \text{ MeV}$.*

kvázičastic pre protóny a neutróny $\epsilon_n = \epsilon_p = \epsilon = \Omega \frac{G}{2}$ a zavedieme označenia

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{m_p} \alpha_{pm_p}^\dagger \alpha_{pm_p} + \sum_{m_n} \alpha_{nm_n}^\dagger \alpha_{nm_n} \\
 \lambda_1 &= 4\Omega[\chi(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) - \kappa(u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2)] \\
 \lambda_2 &= 4\Omega(\chi + \kappa)u_p v_p u_n v_n
 \end{aligned} \tag{6}$$

možno (5) vyjadriť v tvare

$$H_F = \epsilon C + \lambda_1 A^\dagger A + \lambda_2 (A^\dagger A^\dagger + AA). \tag{7}$$

Hamiltonián (7) predstavuje **protón-neutrónový Lipkinov model** a v prípade $\lambda_1 = 0$ sa redukuje na tvar podobný Lipkinovmu modelu (1). Podmienka $\lambda_1 = 0$ zodpovedá situácii $\kappa = \chi$ a $Z = N \equiv \frac{2j+1}{2}$, z čoho vyplývajú rovnosti $v_p = v_n = u_p = u_n$.

Dôležitou vlastnosťou modelu je, že bifermiónové operátory $\{A, A^\dagger, C\}$ sú generátormi $SU(2)$ algebry. Pre ich vzájomné komutátory platia vzťahy

$$[A, A^\dagger] = 1 - \frac{C}{2\Omega}, \quad [C, A^\dagger] = 2A^\dagger, \quad [A, C] = 2A. \tag{8}$$

Exaktné riešenia dostaneme diagonalizáciou hamiltoniánu (7) v báze stavov

$$|n\rangle = \mathcal{N}(A^\dagger)^n |0\rangle, \quad 0 \leq n \leq 2\Omega. \tag{9}$$

Stav $|0\rangle$ označuje BCS vákuum a $\mathcal{N}$ je normalizačná konštanta, $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{m_n}}$, kde $m_n = \langle 0|A^n(A^\dagger)^n|0\rangle = \frac{n!(2\Omega)!}{(2\Omega-n)!(2\Omega)^n}$. Pri výpočte maticového elementu m_n sme využili komutačné vzťahy (8) a fakt, že $|0\rangle$ je vákuom pre A , t. j. $A|0\rangle = 0$. Nenulové maticové elementy $\langle m|H_F|n\rangle$ potrebné pre diagonalizáciu v uvedenej báze sú

$$\langle n-2|H_F|n\rangle = nm_n[2\varepsilon + \lambda_1(1 - \frac{n-1}{2\Omega})], \quad \langle n-2|H_F|n\rangle = \lambda_2 m_n.$$

Energie prvých štyroch stavov získané diagonalizáciou hamiltoniánu (7) pre modelové parametre $N = 4$, $Z = 6$, $j = 9/2$, $\chi' \equiv 2\Omega \chi = 0.5 \text{ MeV}$, $\epsilon = 1 \text{ MeV}$, v závislosti od hodnoty $\kappa' \equiv 2\Omega \kappa$ sú znázornené na obr. 3.

3 Kvázičasticové priblíženie náhodných fáz

Metóda **Random Phase Approximation** (RPA) a jej kvázičasticová varianta (QRPA) sú široko používané v rozličných oblastiach fyziky (napr. jadrová fyzika, fyzika tuhých látok, fyzika plazmy) pri opise kolektívnych stupňov voľnosti mnohofermiónových sústav. QRPA je jednou z najčastejšie používaných metód pre štúdium jednoduchých a dvojitých β prechodov jadrových systémov s otvorenou vrstvou. Výsledkom QRPA výpočtu je úplná sústava vzbudených stavov prechodového jadra, ktoré vystupujú v maticových elementoch $2\nu\beta\beta$ prechodov.

3.1 Formalizmus QRPA metódy

Excitovaný stav je vytvorený pôsobením fonónového operátora na základný stav $|0_{RPA}^+\rangle$. Pre m -tý excitovaný stav s celkovým uhlovým momentom J a priemetom M platí

$$Q_{JM}^{m\dagger}|0_{RPA}^+\rangle = |m, JM\rangle. \quad (10)$$

Základný stav $|0_{RPA}^+\rangle$ je vákuom pre fonónový operátor Q_{JM}^m , teda

$$Q_{JM}^m|0_{RPA}^+\rangle = 0, \quad Q_{JM}^m = (Q_{JM}^{m\dagger})^\dagger. \quad (11)$$

Fonónový operátor je definovaný vzťahom

$$Q_{JM}^m = \sum_{pn} \{X_{pn}^m A^\dagger(pn; JM) - Y_{pn}^m \tilde{A}(pn; JM)\}, \quad (12)$$

kde X_{pn}^m, Y_{pn}^m sú voľné variačné amplitúdy a operátory $A^\dagger(pn; JM), \tilde{A}(pn; JM)$ viažu kvázičasticové kreačné a anihilačné operátory $\alpha^\dagger, \alpha$ do uhlového momentu J s projekciou na zvolenú os M :

$$\begin{aligned} A^\dagger(pn; JM) &= \sum_{m_p, m_n} C_{j_p m_p j_n m_n}^{JM} \alpha_{p m_p}^\dagger \alpha_{n m_n}^\dagger \\ \tilde{A}(pn; JM) &= (-1)^{J-M} A(pn, J-M) = (-1)^{J-M} \sum_{m_p, m_n} C_{j_p m_p j_n m_n}^{J-M} \alpha_{p m_p} \alpha_{n m_n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Predpokladáme, že stavy $|0_{RPA}^+\rangle, |m, JM\rangle$ sú vlastnými stavmi jadrového hamiltoniánu H , teda

$$H|0_{RPA}^+\rangle = E_0|0_{RPA}^+\rangle, \quad H|m, JM\rangle = E_m|m, JM\rangle. \quad (14)$$

Z rovníc (14) vyplýva

$$[H, Q_{JM}^{m\dagger}]|0_{RPA}^+\rangle = \Omega_m Q_{JM}^{m\dagger}|0_{RPA}^+\rangle, \quad (15)$$

kde $\Omega_m = E_m - E_0$ je energia vzбудenia m -tého stavu. Uvažujme variáciu $\delta Q_{JM}^m = \sum_{pn} \{\delta X_{pn}^m A^\dagger(pn; JM) - \delta Y_{pn}^m \tilde{A}(pn; JM)\}$. Z rovnice (15) spolu s využitím vzťahu (10) dostávame

$$\langle 0_{RPA}^+ | [\delta Q_{JM}^m, H, Q_{JM}^{m\dagger}] | 0_{RPA}^+ \rangle = \Omega_m \langle 0_{RPA}^+ | [\delta Q_{JM}^m, Q_{JM}^{m\dagger}] | 0_{RPA}^+ \rangle_A \quad (16)$$

Dvojitý komutátor v (16) je definovaný vzťahom $[A, B, C] = \frac{1}{2}([A, [B, C]] + [[A, B], C])$. Po dosadení (12) do (16) a združení členov pri $\delta X_{pn}^m, \delta Y_{pn}^m$ získame QRPA rovnice

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^m \\ Y^m \end{pmatrix} = \Omega_m \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^m \\ Y^m \end{pmatrix}, \quad (17)$$

kde matice $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sú dané výrazmi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(pn p' n' J) &= \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), H, A^\dagger(p' n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle, \\ \mathcal{B}(pn p' n' J) &= \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), H, \tilde{A}^\dagger(p' n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle, \\ \mathcal{U}(pn p' n' J) &= \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Vyriešením rovníc (17) získame amplitúdy X^m, Y^m a excitačné energie Ω_m , ktoré prostredníctvom (12) jednoznačne určujú vzбудené stavy jadrového systému.

V realistických výpočtoch je riešenie QRPA rovnice pomerne zložitý nelineárny problém, pretože maticové elementy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ spätne závisia od variačných amplitúd X^m, Y^m . Pri riešení QRPA rovníc sú nevyhnutné zjednodušenia, podľa ktorých rozlišujeme rôzne varianty QRPA metódy.

V *štandardnej QRPA* metóde je komutátor bifermiónových operátorov $A, A^\dagger$ nahradený jeho strednou hodnotou v BCS vákuu.

$$\begin{aligned} [A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)] &\approx \langle BCS | [A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)] | BCS \rangle \\ &= \delta_{pp'} \delta_{nn'}. \end{aligned}$$

Uvedené priblíženie sa nazýva kvázibozónová aproximácia. Bifermiónové operátory tu uvažujeme ako bozónové, čoho dôsledkom je narušenie Pauliho vylučovacieho princípu [23].

Pauliho vylučovací princíp je čiastočne vzatý do úvahy v *renormalizovanej QRPA*. Komutátor bifermiónových kreačných a anihilačných operátorov sa tu nahrádza jeho strednou hodnotou v skorelovanom RPA vákuu [23].

$$\begin{aligned} [A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)] &\approx \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle \\ &= \delta_{pp'} \delta_{nn'} D_{pn}. \end{aligned}$$

Renormalizačný parameter $D_{pn} = 1 - N_p - N_n$, kde $N_\tau = \langle rpa | \hat{N}_\tau | rpa \rangle$, spätne závisí od variačných amplitúd X^m, Y^m , takže QRPA rovnica sa musí riešiť iteráčnou metódou. Nedostatkom *renormalizovanej QRPA* metódy je narušenie lke-dovho sumačného pravidla [14].

3.2 QRPA s optimálnym základným stavom

Jednou z variánt metódy QRPA je nedávno navrhnutá *QRPA s optimálnym základným stavom* (QRPA-OGS⁶). Originálnosť tohto prístupu spočíva v zavedení nového stupňa voľnosti v anatzii pre vlnovú funkciu, ktorý v kombinácii s variačnou podmienkou pre základný stav umožňuje riešiť QRPA rovnice [18]. Metóda ako jedna z mála úspešne popisuje jadrový systém aj pre veľké hodnoty časticovo-časticovej interakcie, navyše v rámci nej boli nájdené pre protón-neutrónový Lipkinov model **nové riešenia** v oblasti za kolapsom *štandardnej QRPA*.

QRPA-OGS je formulovaná v bozónovom priestore. Bozónové operátory spĺňajú komutačný vzťah $[B, B^\dagger] = 1$ a báza príslušného Hilbertovho priestoru je tvorená ortonormálnymi vektormi

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (B^\dagger)^n |0\rangle.$$

Obrazy fermiónových operátorov v bozónovom priestore nájdeme tzv. mapovacou procedúrou. Je potrebné poznamenať, že existuje viacero spôsobov mapovania [1]. V tejto práci je použité Marumoriho mapovanie [20], ktoré predpokladá rovnosť odpovedajúcich maticových elementov vo fermiónovom a bozónovom priestore (viď. *dodatok B*). Úplný bozónový obraz operátora podľa Marumoriho predpisu je sumou členov typu $(B^\dagger)^n B^m$. Pri výpočtoch sa zvyčajne obmedzíme

⁶QRPA with optimal ground state

na niekoľko prvých členov bozónového rozvoja, takže mapovanie nie je úplné. Obrazom fermiónového hamiltoniánu (7) je v bozónovom priestore operátor

$$H_B = \alpha_{11}B^\dagger B + \alpha_{20}(B^{\dagger 2} + B^2) + \alpha_{22}B^{\dagger 2}B^2 + \alpha_{13}(B^\dagger B^3 + B^{\dagger 3}B) + \\ \alpha_{24}(B^{\dagger 2}B^4 + B^{\dagger 4}B^2) + \alpha_{35}(B^{\dagger 3}B^5 + B^{\dagger 5}B^3) + \dots \quad (19)$$

Budeme uvažovať nasledujúce neúplné obrazy hamiltoniánu (7):

1. $H_B^{(1)} = \alpha_{11}B^\dagger B + \alpha_{20}(B^{\dagger 2} + B^2) + \alpha_{22}B^{\dagger 2}B^2 + \alpha_{13}(B^\dagger B^3 + B^{\dagger 3}B) + \alpha_{24}(B^{\dagger 2}B^4 + B^{\dagger 4}B^2) + \alpha_{35}(B^{\dagger 3}B^5 + B^{\dagger 5}B^3).$
2. $H_B^{(2)} = \alpha_{11}B^\dagger B + \alpha_{20}(B^{\dagger 2} + B^2) + \alpha_{22}B^{\dagger 2}B^2 + \alpha_{13}(B^\dagger B^3 + B^{\dagger 3}B).$
3. $H_B^{(QBA)} = \alpha_{11}^{(QBA)}B^\dagger B + \alpha_{20}^{(QBA)}(B^{\dagger 2} + B^2).$

Konštanty α_{ij} závisia od parametrov ϵ , λ_1 , λ_2 a Ω , ktoré vystupujú vo fermiónovom hamiltoniáne (7) a ich tvar nájdeme podľa postupu popísaného v *dodatku B*.

$$\alpha_{11} = 2\epsilon + \lambda_1, \quad \alpha_{20} = \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}}, \quad \alpha_{22} = -\frac{\lambda_1}{2\Omega}, \\ \alpha_{13} = \lambda_2 \sqrt{(1 - \frac{1}{2\Omega})(1 - \frac{1}{\Omega})} - \alpha_{20}, \quad \alpha_{24} = \frac{\lambda_2}{2} \sqrt{(1 - \frac{1}{\Omega})(1 - \frac{3}{2\Omega})} - \frac{\alpha_{20}}{2} - \alpha_{13}, \\ \alpha_{35} = \frac{\lambda_2}{6} \sqrt{(1 - \frac{3}{2\Omega})(1 - \frac{2}{\Omega})} - \frac{\alpha_{20}}{6} - \frac{\alpha_{13}}{2} - \alpha_{24}.$$

Hamiltonián $H_B^{(QBA)}$ zodpovedá kvázibozónovej aproximácii, ktorá je limitným prípadom $\Omega \rightarrow \infty$, z čoho vyplývajú vzťahy $\alpha_{11}^{(QBA)} = 2\epsilon + \lambda_1$, $\alpha_{20}^{(QBA)} = \lambda_2$.

V originálnej práci [18] bol QRPA-OGS výpočet uskutočnený pre bozónový hamiltonián $H_B^{(2)}$. Ak však uvažujeme iba kvadratický hamiltonián $H_B^{(QBA)}$, nové módy mnohonukleónového systému, t.j. riešenia za kolapsom neexistujú. V tejto práci je prvýkrát prezentovaná QRPA-OGS metóda s použitím presnejšieho bozónového obrazu hamiltoniánu $H_B^{(1)}$. Na základe výsledkov s presnejším bozónovým obrazom hamiltoniánu sa pokúsime zodpovedať nasledujúce otázky:

- Ako sa spresnia nájsené riešenia, ak uvažujeme v bozónovom obraze hamiltoniánu členy úmerné α_{24} , α_{35} ?
- Neobjavia sa ako dôsledok presnejšieho mapovania hamiltoniánu ďalšie nové riešenia v oblasti za kolapsom *štandardnej QRPA*?

V QRPA s exaktným zahrnutím Pauliho vylučovacieho princípu (QRPA-EPP) [16], ktorá je formulovaná vo fermiónovom priestore, je fonónový operátor definovaný vzťahom

$$Q_F^\dagger = X A^\dagger + Y A. \quad (20)$$

Základný stav je daný rovnicou $Q_F |rpa\rangle = 0$. V bozónovom priestore definujeme Q_B analogicky

$$Q_B^\dagger = X B^\dagger + Y B.$$

Je zrejmé, že takto definovaný fonónový operátor je najjednoduchším obrazom Q_F v bozónovom priestore (t.j. neuvažujeme členy $B^\dagger B^\dagger B$, $BBB^\dagger$ a kombinácie väčšieho počtu $B, B^\dagger$).

Uvažujme stav $|rpa\rangle_1 = e^S |0\rangle$, kde $S = z B^\dagger B^\dagger + z^* B B$ a z je komplexný parameter. Pre základný stav požadujeme splnenie rovnice

$$Q_B |rpa\rangle_1 = 0. \quad (21)$$

V QRPA-OGS metóde sa zavádza originálny ansatz pre vlnovú funkciu

$$|rpa\rangle = e^T e^S |0\rangle, \quad (22)$$

kde $T = t^* B - t B^\dagger$. Komplexný parameter t predstavuje nový stupeň voľnosti jadrového systému, ktorý fixujeme variačnou podmienkou pre základný stav. Z rovnice (21) dostávame

$$e^T (X B - Y B^\dagger) e^{-T} e^T e^S |0\rangle = 0. \quad (23)$$

Použitím vzťahov pre operátory $e^{-T} B^\dagger e^T$, $e^{-T} B e^T$ (viď. *dodatok C*) prepíšeme (23) do tvaru

$$Q |rpa\rangle = 0, \quad (24)$$

kde “posunutý” fonónový operátor Q je definovaný ako

$$Q^\dagger = X (B^\dagger + t^*) - Y (B + t), \quad Q = (Q^\dagger)^\dagger. \quad (25)$$

Excitovaný stav $|Q\rangle$ je vytvorený pôsobením $Q^\dagger$ na základný stav $|rpa\rangle$

$$|Q\rangle = Q^\dagger |rpa\rangle. \quad (26)$$

Pre základný stav $|rpa\rangle$ daný anatzom (22) je podmienka (24) splnená ak platí

$$e^S e^{-S} (XB - YB^\dagger) e^S |0\rangle = 0. \quad (27)$$

Pomocou vzťahov pre $e^{-S} B^\dagger e^S$, $e^{-S} B e^S$ (viď. *dodatok C*) môžeme predošlú rovnicu prepísať do tvaru

$$\mathcal{F}(r, \theta, \rho, \phi) \equiv \sinh(2\rho) - \frac{Y}{X} e^{-i\phi} \cosh(2\rho) = 0. \quad (28)$$

V rovnici (28) sme zaviedli označenia $t = r e^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\phi}$. Funkcia $\mathcal{F}$ implicitne závisí od parametrov r, θ prostredníctvom pomeru X/Y . Fonónové amplitúdy X a Y spĺňajú QRPA rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{A}X + \mathcal{B}Y &= E_{rpa} \mathcal{U}X \\ \mathcal{B}^* X + \mathcal{A}Y &= -E_{rpa} \mathcal{U}Y. \end{aligned} \quad (29)$$

Energia E_{rpa} predstavuje excitačnú energiu systému, t. j. $E_{rpa} = E_1 - E_{g.s.}$. Maticové elementy $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}$ sú dané výrazmi

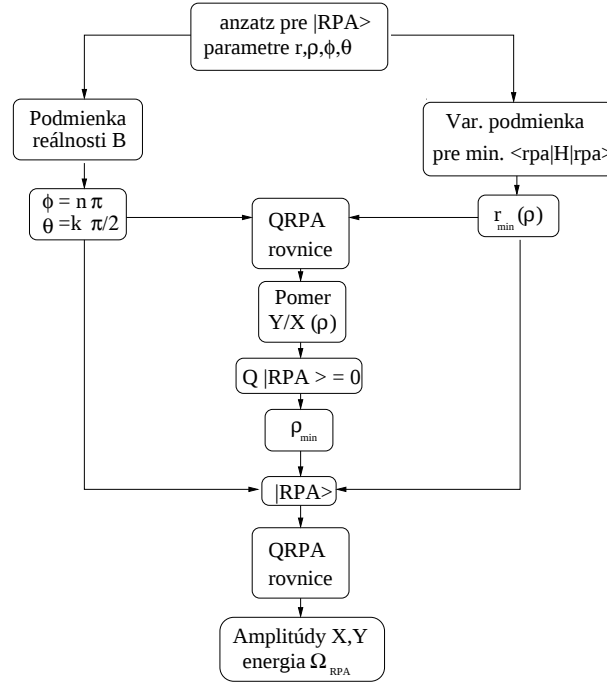
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \langle rpa | [B, H_B, B^\dagger] | rpa \rangle \\ \mathcal{B} &\equiv \langle rpa | [B, H_B, B] | rpa \rangle \\ \mathcal{U} &\equiv \langle rpa | [B, B^\dagger] | rpa \rangle = 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Z analytických výrazov pre $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}$ (viď. *dodatok C*) vidno, že maticový element $\mathcal{A}$ je reálny, ale $\mathcal{B}$ je vo všeobecnosti komplexný. V našom výpočte sa podobne ako v [18] obmedzíme na prípad, keď variačné amplitúdy X, Y sú reálne. Tento výber je podporený faktom, že vlnové funkcie nájdené diagonalizáciou fermiónového hamiltoniánu (7) sú lineárnymi kombináciami stavov $(A^\dagger)^n |0\rangle$ s reálnymi koeficientami. Stav $|Q\rangle$ vytvorený fonónovým operátorom (25) by mal byť bozónovým obrazom prvého excitovaného stavu vo fermiónovom priestore, mal by teda obsahovať iba reálne koeficienty.

Z podmienky reálnosti pre X, Y vyplýva, že aj $\mathcal{B}$ musí byť reálne, a preto uvažujeme iba prípady $\theta = k\pi/2$ a $\phi = n\pi$ ($k, n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Parameter r eliminujeme podmienkou, že stredná hodnota hamiltoniánu v základnom stave dosahuje svoje minimum vzhľadom na r . Pre strednú hodnotu hamiltoniánu $H_B^{(1)}$ platí

$$\mathcal{H} \equiv \langle rpa | H_B^{(1)} | rpa \rangle = H_8 r^8 + H_6 r^6 + H_4 r^4 + H_2 r^2 + H_0. \quad (31)$$



Obr. 4: Bloková schéma výpočtu v QRPA-OGS.

Koeficienty H_i závisia od ρ, θ, ϕ a ich presné vyjadrenia sú uvedené v *dodatku C*.

Stredná hodnota $\mathcal{H}$ je polynóm 8. stupňa v r . Ak uvažujeme jednoduchší hamiltonián $H_B^{(2)}$, je jeho stredná hodnota polynómom iba 4. stupňa v r . Každý ďalší člen v bozónovom rozvoji hamiltoniánu (19) prispieva do výrazu pre strednú hodnotu vyššou mocninou r .

Požiadavka minima $\mathcal{H}$ vzhľadom na r na vedie k rovnici

$$\frac{d\mathcal{H}}{dr} = r(8H_8r^6 + 6H_6r^4 + 4H_4r^2 + 2H_2) = 0. \quad (32)$$

Riešeniami rovnice (32) sú body

1. $r = 0$
2. $r \neq 0$, ktoré spĺňajú $(8H_8r^6 + 6H_6r^4 + 4H_4r^2 + 2H_2) = 0$.

Substitúciou $r' = r^2$ získame z predchádzajúcej podmienky kubickú rovnicu v r' , ktorej riešenia sú dané Kardanovými vzorcami.

Postup pri QRPA-OGS výpočte je schématicky znázornený na obrázku 4. Vlnová funkcia $|rpa\rangle$ obsahuje 4 neznáme parametre. ϕ, θ určíme z podmienky reálnosti maticového elementu $\mathcal{B}$. Parameter r ako funkciu ρ , spĺňajúci podmienku (32) dosadíme do výrazov pre maticové elementy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ a z jednej z rovníc (29)

vyjadríme pomer $\frac{Y}{X}$. Tento pomer dosadíme do rovnice (28), ktorej vyriešením získame hodnotu parametra ρ_{min} odpovedajúcu minimu $\mathcal{H}$. Je potrebné overiť, či má funkcia $\mathcal{H}(r, \rho)$ v tomto bode naozaj minimum. Ak áno, získané hodnoty r_{min}, ρ_{min} určujú spolu s ϕ, θ vlnovú funkciu $|rpa\rangle$, takže môžeme vypočítať maticové elementy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ a vyriešiť QRPA rovnice (29), ktoré nám dajú variáčne amplitúdy X, Y a energiu vzбудenia E_{rpa} . Výhodou tejto procedúry je, že nájdeme všetky možné riešenia, čo pri štandardnom iteračnom riešení QRPA rovníc nevieme zaručiť.

4 Semiklasický opis jadrového systému

Semiklasický prístup [17] predstavuje prvý úspešný pokus opisu mnohonukleónovej sústavy v oblasti časticovo-časticovej interakcie, kde *štandardná QRPA* zlyháva. Jadrový systém tu popisujú klasické pohybové rovnice, ktoré dostaneme ako výsledok časového variačného princípu

$$\delta \int_0^t \langle \psi | H - i \frac{\partial}{\partial t'} | \psi \rangle dt' = 0. \quad (33)$$

Podmienka (33) je ekvivalentná časovej Schrödingerovej rovnici ($\hbar \equiv 1$) pre mnohočasticový hamiltonián H . V nasledujúcej časti prezentujeme semiklasický formalizmus aplikovaný na protón-neutrónový Lipkinov model vo fermiónovom aj bozónovom priestore.

4.1 Semiklasický prístup vo fermiónovom priestore

Budeme uvažovať dva variačné stavy $|\psi_I\rangle$, $|\psi_{II}\rangle$. Variačný stav I definuje vzťah

$$|\psi_I(z, z^*)\rangle = e^{zA^\dagger - z^*A} |0\rangle.$$

Predpokladáme, že A , $A^\dagger$ spĺňajú komutačné vzťahy bozónového typu, teda $[A, A^\dagger] = 1$, $[C, A^\dagger] = 2A^\dagger$, $[A, C] = 2A$. Keďže A , $A^\dagger$ reprezentujú bifermiónové operátory, ide v tomto prípade o kvázibozónovú aproximáciu. Po zavedení označenia $z = x + iy$ a zámene parametrov x , y na $\xi = \sqrt{2}x$, $\eta = \sqrt{2}y$ vyplývajú z variačného princípu (33) Hamiltonove pohybové rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\dot{\eta}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \dot{\xi}. \quad (34)$$

Parametre η , ξ hrajú úlohu kanonických súradníc vo fázovom priestore a Hamiltonova funkcia $\mathcal{H}$ je definovaná ako stredná hodnota hamiltoniánu (7) v stave $|\psi_I\rangle$.

$$\mathcal{H} = \langle \psi_I | H | \psi_I \rangle = \frac{1}{2}(2\epsilon + \lambda_1)(\xi^2 + \eta^2) + \lambda_2(\xi^2 - \eta^2). \quad (35)$$

Z Hamiltonových rovníc (34) dostaneme pre ξ diferenciálnu rovnicu

$$\ddot{\xi} + (2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2)(2\epsilon + \lambda_1 + 2\lambda_2)\xi = 0, \quad (36)$$

čo je rovnica lineárneho harmonického oscilátoran s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{(2\epsilon + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2^2}. \quad (37)$$

Treba zdôrazniť, že výraz (37) je identický so vzťahom pre energiu vzbudenia, ktorú vypočítame v rámci *štandardnej QRPA* metódy.

Uvažujme druhý variačný stav $|\psi_{II}\rangle$:

$$|\psi_{II}(z, z^*)\rangle = e^{zA^\dagger - z^*A}|0\rangle.$$

Na rozdiel od prípadu I teraz predpokladáme presné fermiónové komutačné vzťahy $[A, A^\dagger] = 1 - \frac{C}{2\Omega}$, $[C, A^\dagger] = 2A^\dagger$, $[A, C] = 2A$. Stredná hodnota hamiltoniánu v stave $|\psi_{II}\rangle$ a element $\langle\psi_{II}|\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{II}\rangle$ majú tvar [17]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \langle\psi_{II}|H|\psi_{II}\rangle &= 4\epsilon\Omega V^2 + \lambda_1(2\Omega U^2 V^2 + V^4) + \lambda_2(2\Omega - 1)U^2(V^2 + V^{*2}), \\ \langle\psi_{II}|\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{II}\rangle &= -2\Omega \sin^2(\rho\phi). \end{aligned} \quad (38)$$

Zavedené parametre súvisia s predchádzajúcimi nasledovne:

$$z = \rho e^{i\phi}, U = \cos \rho, V = e^{-i\phi} \sin \rho.$$

Zámenou súradníc $(z, z^*) \rightarrow (r, \phi)$, kde r je dané vzťahom $r = 2\Omega \sin^2 \rho$, dostamene z variačného princípu (33) klasické Hamiltonove rovnice pre kanonické súradnice (r, ϕ) .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\dot{\phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \dot{r}. \quad (39)$$

Hamiltonova funkcia vyjadrená v súradniciach (r, ϕ) má tvar

$$\mathcal{H} = 2\epsilon r + \lambda_1 \left[r \left(1 - \frac{r}{2\Omega} \right) + \frac{r^2}{4\Omega^2} \right] + 2\lambda_2 \frac{2\Omega - 1}{2\Omega} r \left(1 - \frac{r}{2\Omega} \right) \cos 2\phi. \quad (40)$$

Pohybové rovnice (39) sú v tomto prípade nelineárne, preto nemajú jednoduché analytické riešenie. Môžeme nájsť body, v ktorých Hamiltonova funkcia (40) nadobúda minimum a rovnice linearizovať v okolí tohto minima. Stacionárne body, v ktorých sú parciálne derivácie $\mathcal{H}$ podľa r, ϕ nulové určujú možné minimum energie:

$$r_0 = \frac{2\Omega^2}{2\Omega - 1} \frac{2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}}{\lambda_1 - 2\lambda_2}, \quad \phi_0 = \pi/2. \quad (41)$$

Zaujímavé je, že minimum v tomto prípade neleží v počiatku kanonických súradníc. Táto skutočnosť sa interpretuje ako fázový prechod jadrového systému. Existencia tejto “novej” fázy je dovoľená najmä vďaka zápornej hodnote koeficientu λ_1 , ktorý odzrkadľuje príťažlivý charakter párovacej interakcie.

Linearizácia rovníc okolo minima vedie k periodickému pohybu vo fázovom priestore s harmonickou frekvenciou ω .

$$\omega = \left[\frac{4\lambda_2}{\lambda_1 - 2\lambda_2} \left(2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega} \right) \left(2\epsilon - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Harmonický mód s energiou ω opisuje malé oscilácie systému okolo “deformovaného” základného stavu.

4.2 Semiklasický prístup v bozónovom priestore

V tejto časti sú prvýkrát odvodené vzťahy potrebné pre semiklasický výpočet v bozónovom priestore s Marumoriho mapovaním jadrového hamiltoniánu. Ako variačný stav budeme teraz uvažovať

$$|\psi(z, z^*)\rangle = e^{zB^\dagger - z^*B}|0\rangle,$$

kde $B, B^\dagger$ sú bozónové operátory spĺňajúce komutačný vzťah $[B, B^\dagger] = 1$.

Marumoriho mapovaním sme našli obraz hamiltoniánu (7) v bozónovom priestore (19). Pre strednú hodnotu hamiltoniánu (19) v stave $|\psi(z, z^*)\rangle$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \langle \psi | H_B | \psi \rangle = & \alpha_{11} z^* z + \alpha_{20} (z^{*2} + z^2) + \alpha_{22} z^{*2} z^2 + \alpha_{13} (z^* z^3 + z^{*3} z) \\ & + \alpha_{24} (z^{*2} z^4 + z^{*4} z^2) + \alpha_{35} (z^{*3} z^5 + z^{*5} z^3). \end{aligned} \quad (43)$$

Po zavedení označenia $z = x + iy, z^* = x - iy$ a preškálovaní súradníc definovanom vzťahmi $\xi = \sqrt{2}x, \eta = \sqrt{2}y$ dostaneme pre strednú hodnotu (43) vyjadrenie

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \alpha_{11} (\eta^2 + \xi^2) + \alpha_{20} (\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{4} \alpha_{22} (2\xi^2 \eta^2 + \eta^4 + \xi^4) \\ & + \frac{1}{2} \alpha_{13} (\xi^4 - \eta^4) + \frac{1}{4} \alpha_{24} (\xi^4 \eta^2 - \xi^2 \eta^4 - \eta^6 + \xi^6) \\ & + \frac{1}{8} \alpha_{35} (2\xi^6 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^6 + \xi^8 - \eta^8). \end{aligned} \quad (44)$$

Z variačného princípu (33) vyplývajú pre funkciu (44) Hamiltonove pohybové rovnice.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\dot{\eta}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \dot{\xi}. \quad (45)$$

Po dosadení (44) do (45) získame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} f_1 \xi + f_2 \xi^3 + f_3 \xi^5 + f_4 \xi^7 &= -\dot{\eta} \\ g_1 \eta + g_2 \eta^3 + g_3 \eta^5 + g_4 \eta^7 &= \dot{\xi}, \end{aligned} \quad (46)$$

kde funkcie f_i, g_i sú nasledovné:

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} + 2\alpha_{20} + \alpha_{22}\eta^2 - \frac{1}{2}\alpha_{24}\eta^4 - \frac{1}{2}\alpha_{35}\eta^6, & g_1 &= \alpha_{11} - 2\alpha_{20} + \alpha_{22}\xi^2 + \frac{1}{2}\alpha_{24}\xi^4 + \frac{1}{2}\alpha_{35}\xi^6 \\ f_2 &= \alpha_{22} + 2\alpha_{13} + \alpha_{24}\eta^2, & g_2 &= \alpha_{22} - 2\alpha_{13} - \alpha_{24}\xi^2 \\ f_3 &= \frac{3}{2}\alpha_{24} + \frac{3}{2}\alpha_{35}\eta^2, & g_3 &= -\frac{3}{2}\alpha_{24} - \frac{3}{2}\alpha_{35}\xi^2 \\ f_4 &= \alpha_{35}, & g_4 &= -\alpha_{35}. \end{aligned}$$

Systém diferenciálnych rovníc (46) je viazaný a nedá sa previesť na jednu rovnicu, ako sme mali v prípade kvázibozónovej aproximácie. Pri riešení sa obmedzíme iba na prípad malých oscilácií okolo minina energie.

Ak Hamiltonova funkcia nadobúda v bode ξ_0, η_0 minimum, potom pri uvažovaní malých oscilácií $\xi_0 + p, \eta_0 + q$, s využitím podmienky $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}|_{\xi_0, \eta_0} = 0, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}|_{\xi_0, \eta_0} = 0$ a po zanedbaní členov vyšších rádov p, q dostaneme zo (46) zjednodušené pohybové rovnice v tvare

$$\begin{aligned} a_1 p &= -\dot{q} \\ a_2 q &= \dot{p}. \end{aligned} \quad (47)$$

Elimináciou premennej p sa dostávame k rovnici harmonického oscilátora

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (48)$$

Pre frekvenciu ω platí $\omega = \sqrt{a_1 a_2}$. Koeficienty a_1, a_2 sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11} + 2\alpha_{20} + \alpha_{22}(\eta_0^2 + 3\xi_0^2) + 6\alpha_{13}\xi_0^2 + \alpha_{24}(3\eta_0^2\xi_0^2 + \frac{15}{2}\xi_0^4 - \frac{1}{2}\eta_0^4) \\ &\quad + \alpha_{35}(7\xi_0^6 - \frac{1}{2}\eta_0^6 + \frac{15}{2}\xi_0^4\eta_0^2), \\ a_2 &= \alpha_{11} - 2\alpha_{20} + \alpha_{22}(\xi_0^2 + 3\eta_0^2) - 6\alpha_{13}\eta_0^2 - \alpha_{24}(3\eta_0^2\xi_0^2 + \frac{15}{2}\eta_0^4 - \frac{1}{2}\xi_0^4) \\ &\quad - \alpha_{35}(7\eta_0^6 - \frac{1}{2}\xi_0^6 + \frac{15}{2}\xi_0^2\eta_0^4). \end{aligned}$$

Pre výpočet harmonickej frekvencie ω musíme najskôr nájsť body (η_0, ξ_0) , v ktorých dosahuje stredná hodnota hamiltoniánu (43) svoje minimum.

5 Numerická aplikácia metód

Výpočet sme uskutočnili pre modelový prípad systému 4 protónov a 6 neutrónov pohybujúcich sa vo vrstve s uhlovým momentom $j = \frac{9}{2}$. Parametre časticovo-časticovej a časticovo-dierovej interakcie κ , χ , ktoré vystupujú v modelovom hamiltoniáne (7) sú preškálované : $\kappa \rightarrow \kappa' \equiv 2\Omega \kappa$, $\chi \rightarrow \chi' \equiv 2\Omega \chi$. Energiu kvázičastíc ϵ sme položili $1MeV$, parameter χ sme zvolili $0.5MeV$, zatiaľčo κ' považujeme za voľný parameter v intervale $(0, 3) MeV$. Uvedený výber je často používaný pri štúdiách v rámci protón-neutrónového Lipkinovho modelu [16, 18, 14, 25, 27].

5.1 Riešenia v QRPA s optimálnym základným stavom

Výpočet bol uskutočnený pre 3 reprezentácie bozónového hamiltoniánu (19):

$H_B^{(1)}$, $H_B^{(2)}$, H_B^{QBA} (viď. kap. 3.2).

V tabuľke 1 sú uvedené vypočítané hodnoty parametrov vlnovej funkcie $|rpa\rangle$ a energie vzbudení a základného stavu. Index (1) odpovedá výpočtu s $H_B^{(1)}$, prípad (2) označuje výsledky získané s $H_B^{(2)}$. Z tabuľky 1 je zrejmé, že vplyv členov v bozónovom rozvoji hamiltoniánu úmerných α_{24} , α_{35} je malý. Rozdiel vypočítaných energií v prípadoch (1) a (2) je $\Delta E = E^{(1)} - E^{(2)} \approx 0.0001 - 0.003 MeV$ pričom sa s nárastom κ' zväčšuje.

Na obrázku 5 je znázornená závislosť parametra vlnovej funkcie ρ od hodnoty p - p interakcie κ' . Pri zvolených parametroch štandardná QRPA (QBA) kolabuje v blízkosti $\kappa_c = 1.06 MeV$. Pre $\kappa < \kappa_c$ existujú iba riešenia $a1$, $a2$. Riešenie $a1$ nebolo doteraz v QRPA výpočtoch nájdené, pretože tieto boli robené iteračne. Originálny QRPA-OGS výpočet zaručuje nájdenie všetkých riešení.

Pre $\kappa = 1.23 MeV$ riešenie $a1$ spojitě prechádza na typ $c1$. Pre $a1$ a $c1$ je charakteristická vysoká hodnota energie základného stavu $E_{g.s.}$ a veľmi nízka energia vzbudení E_{rpa} . Priebeh $E_{g.s.}$ a E_{rpa} v závislosti od κ' pre riešenia $a1$, $c1$ je znázornený na obrázku 9.

Riešenie $a2$ existuje pre κ' z celého intervalu $(0, 3) MeV$, teda ďaleko za bodom kolapsu štandardnej QRPA. Hodnoty energií zodpovedajúce prípadu $a2$ sú podobné výsledkom nájdeným v QRPA-EPP [16].

Tabuľka 1: Vypočítané energie vzбудenia (E_{rpa}) a energie základného stavu ($E_{g.s.}$) v rámci QRPA s opt. zákl. stavom pre $\kappa' = 0.5, 1.5$ a 2.5 , $\chi' = 0.5$ a $j = 9/2$.

Typ	ϕ	θ	$\rho^{(1)}$	$\pm r^{(1)}$	$E_{rpa}^{(1)}$	$E_{g.s.}^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\pm r^{(2)}$	$E_{rpa}^{(2)}$	$E_{g.s.}^{(2)}$
$\kappa' = 0.5$										
a1	0	-	0.7445	0	0.0484	6.8023	0.7568	0	0.0464	7.0013
a2	π	-	0.1137	0	1.9063	-0.1037	0.1137	0	1.9064	-0.1037
$\kappa' = 1.5$										
a2	π	-	0.3084	0	0.9088	-0.6786	0.3085	0	0.9082	-0.6788
c1	0	π	0.7349	0.7741	0.0361	6.5762	0.7554	0.6619	0.0243	6.9500
$\kappa' = 2.5$										
a2	π	-	0.3995	0	0.6764	-1.8391	0.3999	0	0.6754	-1.8353
c1	0	π	0.7487	1.2714	0.1541	5.2013	0.7796	1.1517	0.1118	5.9960
c2	π	π	0.3838	0.2846	0.7202	-1.8336	0.3842	0.2849	0.7191	-1.8353
c3	0	π	-0.0418	1.6843	4.5827	-3.6071	-0.0416	1.6848	4.5800	-3.6086

Pre $\kappa' > 1.53 \text{ MeV}$ existujú okrem riešenia $a2$ ďalšie dva nové módy $c2$, $c3$. Tieto nájdeme iba v prípade hamiltonánu $H_B^{(1)}$ a $H_B^{(2)}$. Pri výpočte s kvadratickým hamiltonánom $H_B^{(QBA)}$ uvedené riešenia neexistujú.

Na obrázku 8 sú vykreslené vypočítané energie pre riešenia $a2$, $c2$, $c3$. Riešenie $a2$ dobre popisuje presné hodnoty energií do $\kappa' \approx 1.5 \text{ MeV}$. Pre vyššie hodnoty p - p interakcie je odchýlka od presnej excitačnej energie väčšia ($\approx 0.7 \text{ MeV}$) a odchýlka od exaktnej energie základného stavu dosahuje až 3 MeV . Naproti tomu, nové riešenie $c3$ dobre popisuje základný stav v celej oblasti svojej existencie. Druhý nový mód $c2$ takmer kopíruje priebeh $a2$ riešenia.

Na obrázku 4 je znázornený priebeh strednej hodnoty hamiltoniánu v rpa vákuu v závislosti od parametra r . Zaujímavé je, že v prípade riešení $c1$, $c2$, $c3$ sa minimum energie nenachádza v počiatku súradníc, ale existujú dve minimá v bodoch $\pm r_{min}$. Pre veľké hodnoty p - p interakcie dochádza teda k spontánnemu narušeniu symetrie základného stavu. Tento fakt indikuje fázový prechod jadra zo sférického do deformovaného tvaru.

Tabuľka 2: *Energie základného stavu $E_{g.s.}$ a harmonické frekvencie ω vypočítané v rámci semiklasického formalizmu aplikovaného na protón-neutrónový Lipkinov model s $j = \frac{9}{2}$ a odpovedajúce energie nájdené v QRPA výpočtoch.*

κ'	$\xi^{(1)}$	$\eta^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	$E_{g.s.}^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\eta^{(2)}$	$\omega^{(2)}$	$E_{g.s.}^{(2)}$	E_{rpa}	$E_{g.s.}^{rpa}$
0.5	0	0	1.8254	0	0	0	1.8254	0	1.8009	-0.1199
1.5	0	1.6147	2.1588	-0.4833	0	1.6142	2.1584	-0.4830	-	-
2.5	0	2.3406	4.5065	-3.5787	0	2.3399	4.5039	-3.5712	4.5827	-3.6071

5.2 Semiklasický výpočet

Tabuľka 2 ukazuje hodnoty získané semiklasickým výpočtom v bozónovom priestore. Indexy (1) a (2), podobne ako v predchádzajúcom, označujú výpočet s hamiltoniánom $H_B^{(1)}$ resp. $H_B^{(2)}$. Z vypočítaných hodnôt je zrejmé, že členy v hamiltoniáne úmerné α_{24} , α_{35} majú veľmi malý vplyv, nakoľko rozdiel energií v prípadoch bozónového mapovania (1) a (2) dosahuje maximálne 0.003 MeV .

Treba poznamenať, že v oblasti $\kappa' < 1.104 \text{ MeV}$ sa našlo iba jedno minimum Hamiltonovej funkcie (44), a to v bode $(\eta_0, \xi_0) = (0, 0)$, kdežto pre $\kappa' > 1.104 \text{ MeV}$ máme dve minimá zodpovedajúce rovnakej energii v bodoch $(\eta_0, \xi_0) = (\pm a, 0)$, kde hodnota a závisí od κ' .

Na obrázku 10 je porovnanie harmonických frekvencií ω vypočítaných v bozónovom a vo fermiónovom priestore. Je zrejmé, že bozónové riešenie je v dobrej zhode s fermiónovým, teda bozónové mapovanie hamiltoniánu je dostačujúce. Pozoruhodný je súvis harmonických frekvencií ω s riešeniami typu c3 z metódy QRPA-OGS. Z obrázka 8 vidíme, že mód c3 pre $\kappa' > 1.6 \text{ MeV}$ takmer kopíruje priebeh ω . Pre $\kappa' < 1.104 \text{ MeV}$ má semiklasická frekvencia ω podobný priebeh ako QBA (v prípade fermiónového riešenia sú totožné). Súvis c3 riešenia z metódy QRPA-OGS a semiklasického riešenia je názorne ukázaný na obrázku 7.

5.3 Stredné hodnoty počtu kvázičastíc

Dôležitou charakteristikou pri porovnávaní kvality QRPA metód je stredný počet kvázičastíc v základnom (N_0) a excitovanom stave (N_1).

$$N_0 = \langle RPA | \frac{C}{2} | RPA \rangle, \quad N_1 = \langle RPA | Q \frac{C}{2} Q^\dagger | RPA \rangle$$

$$\Delta N = N_1 - N_0. \quad (49)$$

Keďže QRPA-OGS je formulovaná v bozónovom priestore, pre výpočet N_0 , N_1 musíme nájsť bozónový obraz operátora C . Marumoriho mapovacím postupom (*dodatok B*) dostaneme pre bozónový obraz

$$C_B = 2B^\dagger B. \quad (50)$$

Obraz operátora C daný rovnicou (50) je úplne presný, nakoľko ďalšie členy bozónového rozvoja sú nulové.

Na obrázkoch 11 a 12 sú znázornené vypočítané hodnoty N_0 a ΔN ako funkcie p - p interakcie. Výpočty boli uskutočnené pre bozónové obrazy $H_B^{(1)}$ a $H_B^{(2)}$, no korekcie pochádzajúce od členov úmerných α_{24} , α_{35} sú podobne ako v prípade energií veľmi malé. Z obrázka 11 vidno, že riešenie typu $a2$ dobre simuluje výsledky získané diagonalizáciou iba do hodnoty $\kappa' \approx 1 \text{ MeV}$. V oblasti $\kappa' > 1.5 \text{ MeV}$ najlepšie súhlasí s diagonalizáciou mód $c3$ a semiklasický výpočet. Pre excitovaný stav sa QRPA-OGS výpočty značne líšia od exaktných výsledkov z diagonalizácie hamiltoniánu.

Z priebehu ΔN (obrázok 12) je zrejmé, že dobrá zhoda sa dosahuje len pre malé hodnoty κ' , čo však poskytuje aj štandardná QRPA (QBA). Pre $\kappa' > 1.5 \text{ MeV}$ ani jedno z riešení nepopisuje korektne exaktné hodnoty. Riešenia $a2$, $c2$ majú rastúci charakter, naopak hodnoty z diagonalizácie klesajú k nule. Riešenie $c3$ má približne konštantný priebeh a je najbližšie k hodnote z diagonalizácie hamiltoniánu.

5.4 Amplitúdy Fermiho β prechodov

Pri opise β prechodov jadrových systémov majú kľúčovú úlohu maticové elementy $\beta^\pm$ operátorov. V kvázičasticovej reprezentácii majú operátory $\beta^\pm$ tvar

$$\beta^- = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n A^\dagger + v_p u_n A), \quad \beta^+ = (\beta^-)^\dagger, \quad (51)$$

pričom sme zanedbali, podobne ako pri odvádzaní hamiltoniánu (7) tzv. rozptylové členy (viď. kapitola 2.1). Bozónové obrazy operátorov A , $A^\dagger$ sú podľa Marumoriho mapovania nasledovné:

$$A_B^\dagger = a_{10}B^\dagger + a_{21}B^\dagger B^\dagger B + a_{32}B^\dagger B^\dagger B^\dagger BB + a_{43}B^\dagger B^\dagger B^\dagger B^\dagger BBB + \dots, \\ A_B = (A_B^\dagger)^\dagger, \quad (52)$$

kde pre koeficienty a_{ij} platia vzťahy

$$a_{10} = 1, \quad a_{21} = \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}} - 1, \quad a_{32} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}} + \frac{1}{2}, \\ a_{43} = \frac{1}{6}\sqrt{1 - \frac{3}{2\Omega}} - a_{32} - \frac{a_{21}}{2} - \frac{1}{6}. \quad (53)$$

Fermiho operátory $\beta^\pm$ nemajú presné bozónové obrazy, ako to bolo v prípade operátora počtu kvázičastíc. Pri výpočtoch berieme do úvahy iba niekoľko prvých členov rozvoja (52).

Výpočet maticových elementov $\langle \beta^\pm \rangle \equiv \langle 0_1^+ | \beta^\pm | RPA \rangle^7$ sme uskutočnili pre nasledujúce prípady:

- I. Operátory A , $A^\dagger$ uvažujeme ako bozónové, teda $A_B = B$, $A_B^\dagger = B^\dagger$.
- II. V bozónovom rozvoji (52) uvažujeme členy úmerné a_{10} , a_{21} .
- III. V bozónovom rozvoji (52) uvažujeme členy úmerné a_{10} , a_{21} , a_{31} , a_{43} .

Na obrázkoch 13 a 14 sú nakreslené priebehy β amplitúd ako funkcie p - p interakcie pre jednotlivé QRPA-OGS riešenia spolu s výsledkami so štandardnej QRPA a diagonalizácie hamiltoniánu.

Riešenie a2 dobre súhlasí s diagonalizáciou iba do hodnoty $\kappa' \approx 1 \text{ MeV}$. Vplyv mapovania operátorov A , $A^\dagger$ je výrazný iba pre riešenia c2, c3, pričom z priebehov na obrázkoch 13 a 14 vyplýva, že rozhodujúci je príspevok prvých dvoch členov rozvoja (prípád II). Dodaním ďalších členov (prípád III) sa riešenia iba mierne zmodifikujú.

V prípade $\langle \beta^- \rangle$ amplitúdy ani jedno z riešení nepopisuje korektne správanie sa exaktnej hodnoty pre veľké κ' . Priebeh exaktného riešenia $\langle \beta^+ \rangle$ pre $\kappa' > 1.5 \text{ MeV}$ kvalitatívne reprodukuje mód $-c3$ (maticové elementy môžeme uvažovať s ľub. fázou).

⁷ $|0_1^+\rangle$ označuje prvý excitovaný stav, čomu v tomto prípade zodpovedá stav $Q^\dagger |RPA\rangle$

5.5 Ikedovo sumačné pravidlo

Pomocou vypočítaných $\beta^\pm$ amplitúd je možné preveriť splnenie Ikedovho sumačného pravidla [30, 31, 32]. V našom modelovom prípade je Fermiho β operátor daný vzťahom

$$\beta^\pm = \sum_k \tau_k^\pm, \quad (54)$$

kde $\tau_k^\pm$ označuje zvyšovací resp. znižovací izospinový operátor a sumujeme cez jednotlivé jednočasticové stavy. Silové funkcie pre β prechody $S^\pm$ sú dané kvadrátmi $\beta^\pm$ amplitúd. Pre rozdiel $S^- - S^+$ dostávame

$$\begin{aligned} S^- - S^+ &= \sum_i (\langle 0^+ | \sum_k \tau_k^+ | 0_i^+ \rangle \langle 0_i^+ | \sum_l \tau_l^- | 0^+ \rangle - \langle 0^+ | \sum_k \tau_k^- | 0_i^+ \rangle \langle 0_i^+ | \sum_l \tau_l^+ | 0^+ \rangle) \\ &= \sum_k \langle 0^+ | \tau_k^+ \tau_k^- - \tau_k^- \tau_k^+ | 0^+ \rangle = \langle 0^+ | 2 \sum_k \tau_k^z | 0^+ \rangle = N - Z. \end{aligned}$$

Stav $|0^+\rangle$ označuje základný stav jadra, $|0_i^+\rangle$ predstavuje i -ty vzбудený stav. Využili sme úplnosť stavov $|0_i^+\rangle$, teda $\sum_i |0_i^+\rangle \langle 0_i^+| = 1$ a fakt, že izospinové operátory pre rôzne k, l komutujú.

V študovanej QRPA-OGS metóde máme iba jeden vzbudený stav a zákl. stav je daný vlnovou funkciou $|RPA\rangle$, preto pre S^+ , S^- platí

$$S^- = |\langle 0_1^+ | \beta^- | RPA \rangle|^2, \quad S^+ = |\langle 0_1^+ | \beta^+ | RPA \rangle|^2. \quad (55)$$

Je známe, že Ikedovo sumačné pravidlo je automaticky splnené v štandardnej QRPA [24] a narušuje sa v renormalizovanej QRPA [14].

Pre náš modelový prípad máme $N - Z = 2$. Z obrázka 15 vidno, že ani exaktné riešenie nespĺňa Ikedovo sumačné pravidlo a pre $\kappa' > 1 \text{ MeV}$ je odchýlka od požadovanej hodnoty značná. Pravdepodobným dôvodom tohto javu je zanedbanie tzv. rozptylových členov pri odvádzaní kvázičasticového hamiltoniánu (7). Čiara I predstavuje prípad, keď uvažujeme operátory A , $A^\dagger$ vstupujúce do maticových elementov $\langle \beta^\pm \rangle$ ako bozónové. V tomto prípade je Ikedovo pravidlo splnené presne. Trend riešenia z diagonalizácie hamiltoniánu najlepšie reprodukuje mód c3 s najpresnejším mapovaním β operátorov (III).

5.6 Maticový element $2\nu\beta\beta$ prechodu

Vlnové funkcie vypočítané pomocou metódy QRPA-OGS boli použité na výpočet maticového elementu dvojneutrínovho dvojitého beta prechodu. V rámci použitého QRPA-OGS prístupu máme iba jeden vzbudený stav, preto má Fermiho maticový element tvar [33].

$$M_F^{2\nu\beta\beta} = \frac{f \langle RPA | \beta^+ | 0_1^+ \rangle_f \langle 0_1^+ | \beta^- | RPA \rangle_i}{\mathcal{E}_{QRPA} + \Delta}. \quad (56)$$

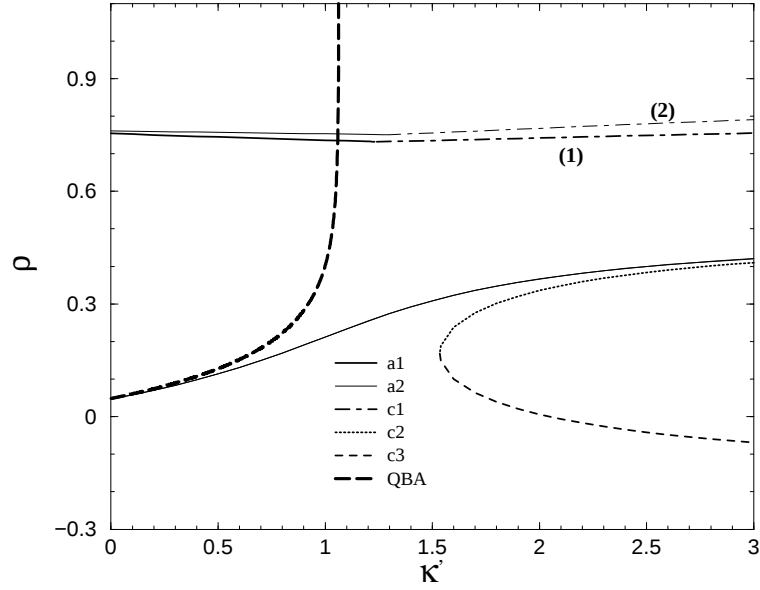
Indexy i, f označujú stavy inícálneho resp. finálneho jadra, $\mathcal{E}_{QRPA}$ predstavuje excitačnú energiu vypočítanú QRPA metódou.

Numerický výpočet Fermiho maticového elementu sme previedli pre jadrový prechod:

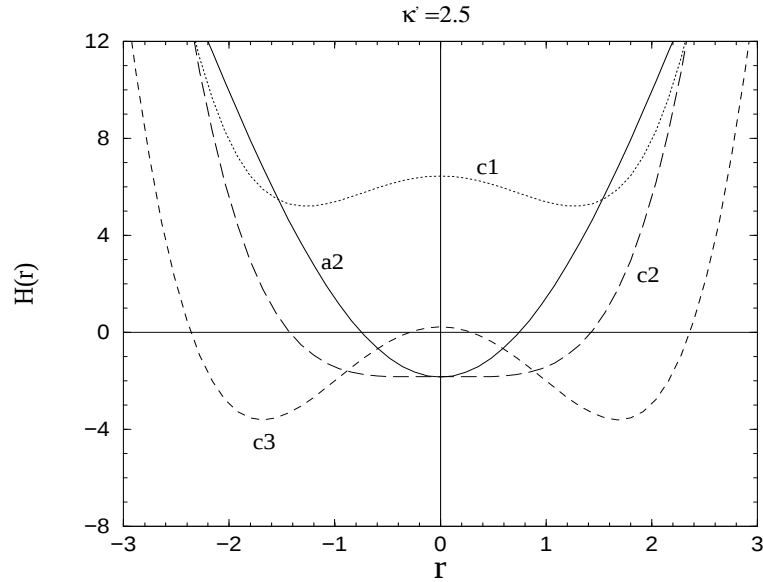
$$(Z = 6, N = 14) \rightarrow (Z + 2 = 8, N - 2 = 12),$$

pričom modelové parametre sú zvolené nasledovne: $j = \frac{19}{2}$ a $\Delta = 0.5 MeV$.

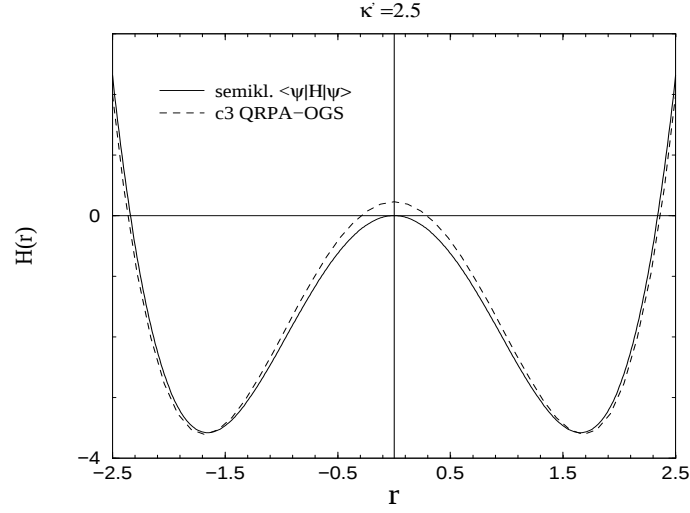
Výsledky získané s rôznymi aproximáciami sú znázornené na obrázku 16. V prípade štandardnej QRPA (QBA) hodnota maticového elementu kolabuje pri $\kappa' \approx 1 MeV$. Riešenia získané v rámci nového QRPA-OGS prístupu existujú v celom intervale $(0, 3) MeV$. Zaujímavý je priebeh exaktného riešenia, ktoré v blízkosti $\kappa' = 1.25 MeV$ prechádza do záporných hodnôt. Kvalitatívne jeho priebeh najlepšie simuluje kombinované riešenie $c23$ (vlnové funkcie inícálneho jadra sú riešenia typu $c2$, finálneho $c3$). Stupeň bozónového mapovania β operátorov je rozlíšený indexami I, II, III, rovnako ako v prípade $\langle \beta^\pm \rangle$ amplitúd. Paradoxne sa v tomto prípade exaktného riešenia najlepšie približuje mód $c23$ I, čiže výpočet s najmenej presnými obrazmi $\beta^\pm$ operátorov.



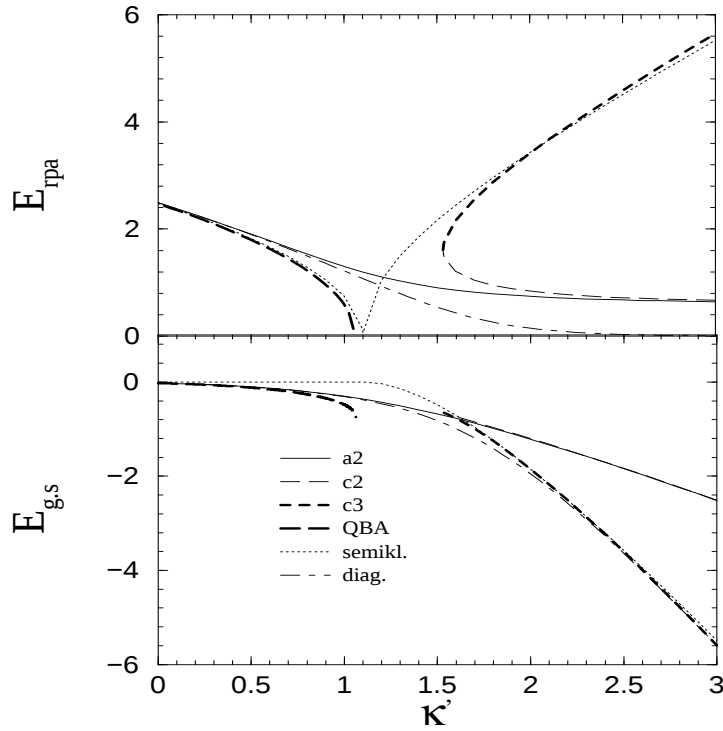
Obr. 5: Parameter ρ vlnovej funkcie RPA ako funkcia časticovo-časticovej interakcie κ' . Línia (1) odpovedá bozónovému hamiltoniánu $H_B^{(1)}$, prípad (2) predstavuje výpočet s $H_B^{(2)}$. Pre riešenia a2, c2, c3 je rozdiel medzi prípadmi (1) a (2) malý, takže grafy sa pri zvolenej škále prekrývajú.



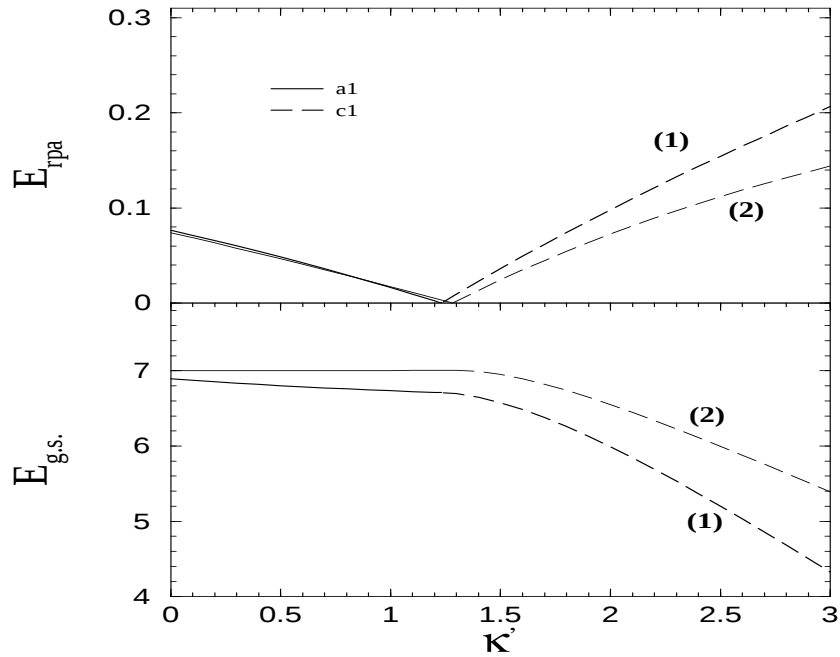
Obr. 6: Priebeh strednej hodnoty hamiltoniánu $\langle rpa|H|rpa \rangle$ v závislosti od parametra r pri hodnote $\kappa' = 2.5 \text{ MeV}$.



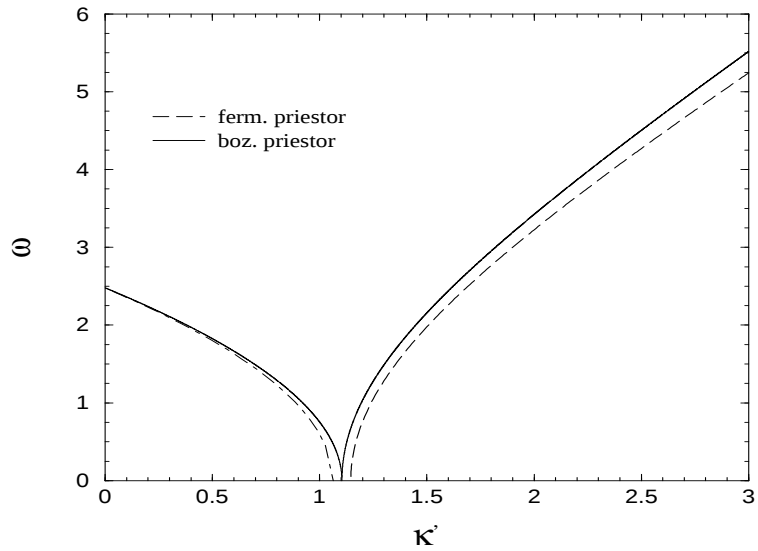
Obr. 7: Stredná hodnota hamiltoniánu pre QRPA-OGS riešenie typu c3 a semi-klasické riešenie v závislosti od parametra r .



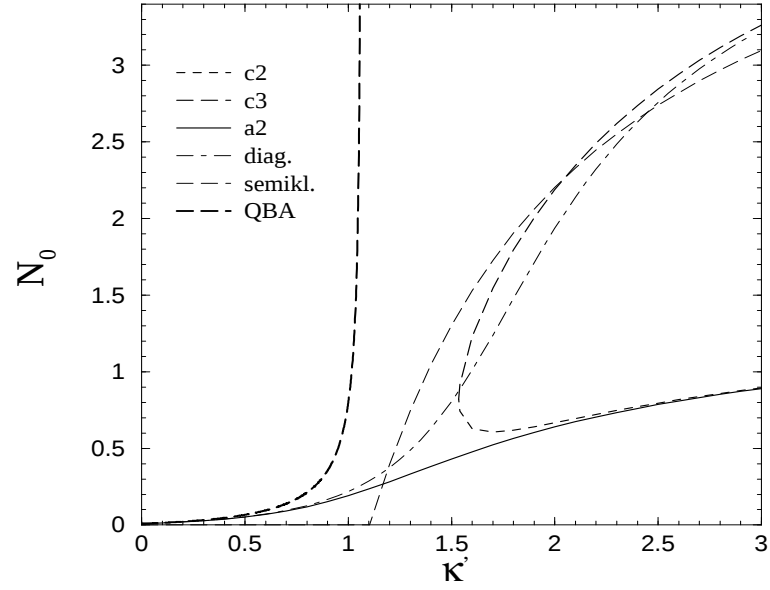
Obr. 8: Energia základného stavu $E_{g,s}$ a energia vzбудenia E_{rpa} pre riešenia typu a2, c2, c3. Pre porovnanie sú znázornené exaktné hodnoty získané diagonalizáciou hamiltoniánu a energie vypočítané v rámci semiklasického prístupu.



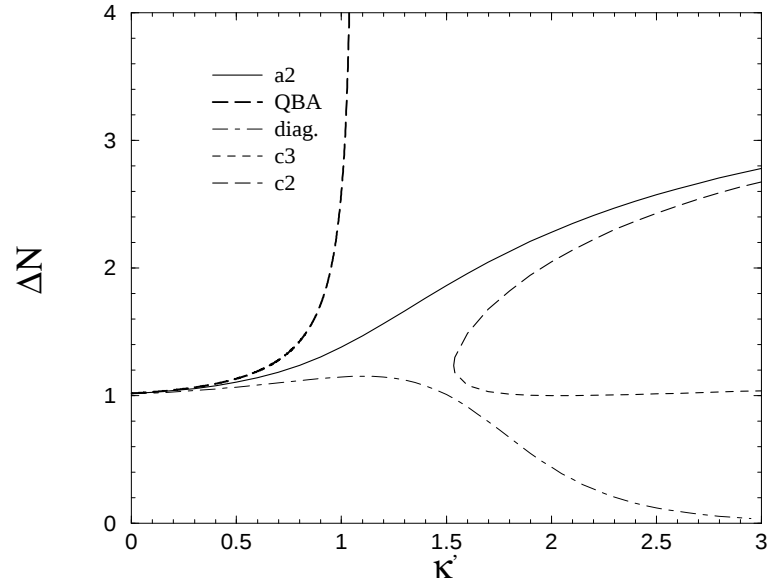
Obr. 9: Energia základného stavu $E_{g.s.}$ a energia vzбудenia E_{rpa} pre riešenia typu a1, c1. Pribeh (1) zodpovedá bozónovému hamiltoniánu $H_B^{(1)}$, (2) predstavuje výpočet s hamiltonánom $H_B^{(2)}$.



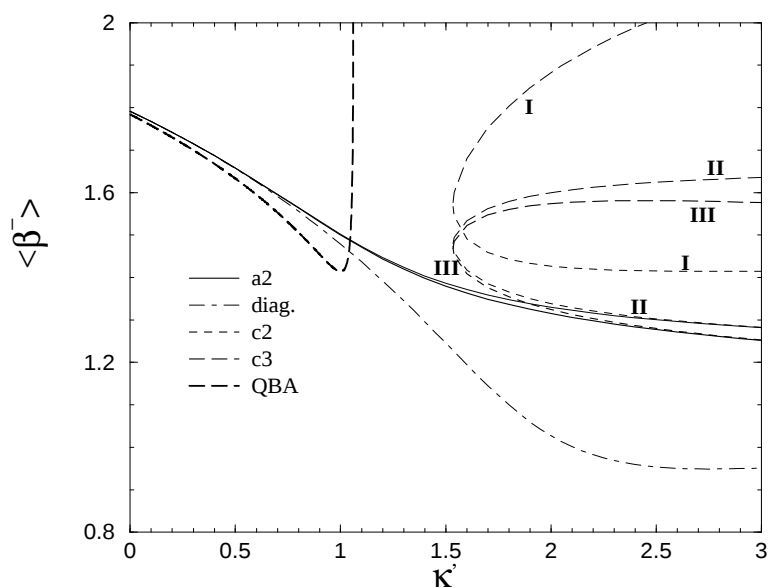
Obr. 10: Semiklasická harmonická frekvencia ω vypočítaná v bozónovom a fermiónovom priestore v závislosti od κ' .



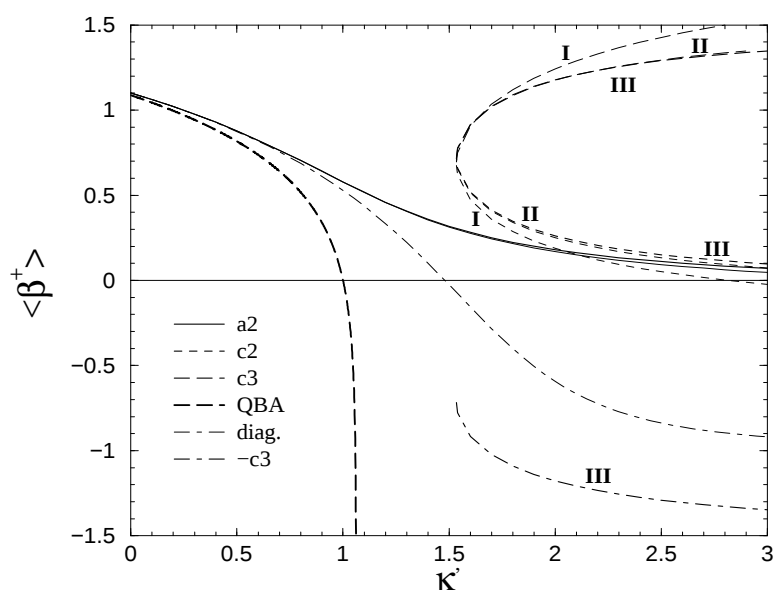
Obr. 11: Stredná hodnota počtu kvázičastíc v základnom stave počítaná metódou QRPA-OGS a semiklasickým formalizmom ako funkcia κ' . Pre porovnanie sú znázornené hodnoty z diagonalizácie hamiltoniánu a štandardnej QRPA(QBA).



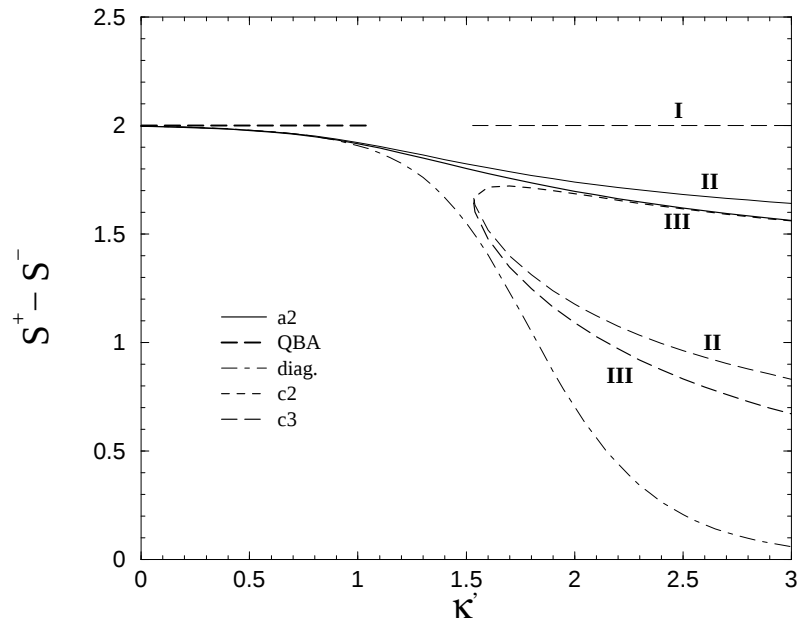
Obr. 12: Diferencia stredných hodnôt počtu kvázičastíc v excitovanom a základnom stave vypočítaná v rámci QRPA-OGS. Pre porovnanie sú znázornené výsledky získané diagonalizáciou hamiltoniánu a štandardnou QRPA(QBA).



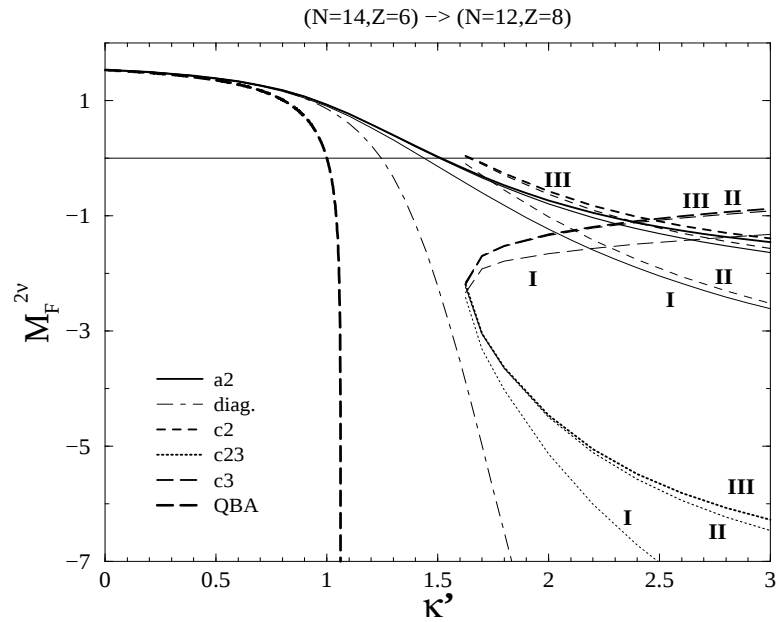
Obr. 13: Amplitúda β^- prechodu medzi základným stavom a prvým excitovaným stavom ako funkcia κ' . Označenia I,II,III zodpovedajú rôznym stupňom mapovania β^- operátora.



Obr. 14: Amplitúda β^+ prechodu medzi základným stavom a prvým excitovaným stavom ako funkcia κ' . Označenia I,II,III zodpovedajú rôznym stupňom mapovania β^+ operátora.



Obr. 15: Priebeh $S^+ - S^-$ v závislosti od κ' pre jednotlivé riešenia získané v rámci QRPA-OGS. Indexy I, II, III označujú výpočty s rôznymi stupňami mapovania $\beta^\pm$ operátorov.



Obr. 16: Maticový element Fermiho $2\nu\beta\beta$ prechodu ako funkcia κ' . Označenia I, II, III zodpovedajú rôznemu stupňu bozónového mapovania $\beta^\pm$ operátorov.

6 Záver

Za jeden z najvhodnejších spôsobov opisu β a $\beta\beta$ prechodov jadier s otvorenou vrstvou je v súčasnosti považovaná *štandardná metóda QRPA* (Quasiparticle Random Phase Approximation). Napriek úspechu tejto metódy, ktorým je napr. vysvetlenie potlačenia $\beta\beta$ prechodov je potrebné ísť za jej rámec a rozvíjať nové mnohonukleónové teórie. Dôvodom sú dva nedostatky, ktoré znižujú jej predpovedaciu schopnosť.

Prvým nedostatkom je extrémna citlivosť vypočítaných hodnôt β a $\beta\beta$ maticových elementov na hodnote časticovo-časticovej interakcie jadrového hamiltoniánu. V oblasti jej predpokladných fyzikálnych hodnôt nadobúda maticový element dvojneutrínového $\beta\beta$ prechodu nulovú hodnotu, čomu zodpovedá nekonečný polčas rozpadu. Keďže dvojneutrínový mód bol experimentálne potvrdený pre viaceré jadrá, je tento fakt v rozpore s experimentálnymi údajmi.

Druhým nedostatkom je kolaps riešení *štandardnej QRPA* metódy v dôsledku tzv. kvázibozónového priblíženia, ktoré spôsobuje nekontrolovateľný rast korelácii základného stavu. Výsledkom je, že od určitej hodnoty časticovo - časticovej interakcie neexistujú v *štandardnej QRPA* riešenia.

Priblíženia mnohonukleónových teórií a ich dôsledky je vhodné skúmať v rámci schématických modelov. Nedávno bola na príklade jednoduchého modelu prezentovaná nová metóda opisu mnohonukleónového systému - *QRPA s optimálnym základným stavom (QRPA-OGS)* [18]. Pomocou zavedenia originálneho anatzu pre vlnovú funkciu bola umožnená optimalizácia základného stavu a súčasné riešenie QRPA rovníc. Hlavným úspechom tejto metódy je nájdenie nových riešení v oblasti za kolapsom *štandardnej QRPA*. Niektoré z nich súvisia so spontánnym narušením symetrie základného stavu systému.

Náplňou tejto práce bolo štúdium podstaty vzniku nových riešení v rámci QRPA-OGS metódy. Pre tento účel bol uskutočnený výpočet s presnejším bozónovým obrazom jadrového hamiltoniánu v rámci protón-neutrónového Lipkinovho modelu. Predmetom záujmu bolo zistiť, či presnejšie mapovanie hamiltoniánu nepovedie ku vzniku nových riešení. Pre potrebu interpretácie jednotlivých riešení bola uskutočnená konfrontácia s riešeniami nájdenými pomocou *Semiklasického*

prístupu [17], ktorý bol prvýkrát formulovaný s použitím Marumoriho mapovacieho predpisu.

Hlavné výsledky práce možno zhrnúť do nasledujúcich bodov.

- [1.]** Odvodili sme analytické vzťahy potrebné pre QRPA-OGS a Semiklasický výpočet s presnejším mapovaním modelového hamiltoniánu do bozónového priestoru.
- [2.]** Porovnanie energií získaných s novým, presnejším mapovaním hamiltoniánu s výsledkami, ktoré boli dosiahnuté v originálnej práci [18] ukázalo, že dodatočné členy v bozónovom rozvoji hamiltoniánu málo modifikujú známe riešenia. Výnimku tvoria riešenia *a1*, *c1*, kde sa vplyv presnejšieho mapovania hamiltoniánu viditeľne prejavil. Interpretácia týchto módov nie jasná, pretože sú charakterizované vysokou hodnotou energie základného stavu a nízkou energiou vzбудenia. Predpokladáme, že tieto módy by mohli súvisieť s vyššími vzbudzeniami jadrového systému.
- [3.]** Pauliho vylučovací princíp je v QRPA-OGS výpočte dostatočne zohľadnený s bozónovým obrazom hamiltoniánu, ktorý obsahuje kombinácie najviac 4 kreačných a anihilačných operátorov. Výpočet s presnejším bozónovým obrazom hamiltoniánu je náročný z analytického aj numerického hľadiska, pričom nedôjde k výraznej modifikácii už známych výsledkov.
- [4.]** Ukázali sme, že pri výpočte s presnejším bozónovým obrazom jadrového hamiltoniánu sa neobjavujú ďalšie nové riešenia za bodom kolapsu *štandardnej QRPA* metódy.
- [5.]** Ako referenčná štúdia bol prvýkrát uskutočnený *Semiklasický výpočet s Marumoriho mapovacou procedúrou*. Rozdiely medzi výsledkami nájdenými v rámci tohto prístupu a presnými hodnotami z diagonalizácie hamiltoniánu poukazujú na prítomnosť anharmonických efektov vo vzbudeniach mnohonukleónových systémov.
- [6.]** Dobrý súhlas *c3* riešenia nájdeného v QRPA-OGS so semiklasickým riešením potvrdzuje, že excitácie mnohonukleónovej sústavy opisované týmto riešením odpovedajú harmonickým vzbudeniam systému.
- [7.]** Výsledky výpočtu stredného počtu kvázičastíc v základnom a excitovanom stave ukazujú, že QRPA-OGS korektne opisuje korelácie v základnom stave a nadhodocuje korelácie v excitovanom stave, najmä v oblasti za kolapsom *stan-*

standardnej QRPA metódy.

[8.] Hodnoty $\beta^\pm$ amplitúd a Fermiho maticového elementu pre $2\nu\beta\beta$ prechod v rámci QRPA-OGS ukazujú, že výsledky podstatne závisia najmä od prvých dvoch členov v bozónovom obraze bifermiónových operátorov $A, A^\dagger$.

Všetky dosiahnuté výsledky ukazujú, že presnejším bozónovým mapovaním jadrového hamiltoniánu sa v rámci QRPA-OGS nezískajú nové riešenia a známe riešenia sa výrazne nezmenia. Dôležitosť presnejšieho mapovania fermiónových operátorov sa ukázala opodstatnená v prípade β prechodových operátorov. Uvedené štúdie ukázali, že ďalšie zlepšenie opisu mnohonukleónovej sústavy za kolapsom *standardnej QRPA* metódy zrejme súvisí s doposiaľ nepreskúmanou možnosťou, a to modifikáciou fonónového operátora uvažovaním nelineárnych členov v jeho rozklade. Naše predbežné štúdie ukazujú, že v uvažovanom schématickom modeli je QRPA výpočet s takýmto fonónovým ansatzom realizovateľný.

A Bogoliubov-Valatinova transformácia

Modelový hamiltonián má v reprezentácii časticových kreačných a anihilačných operátorov tvar (neuvažujeme reziduálnu interakciu H_{res}):

$$H = H_p + H_n. \quad (57)$$

Hamiltonián obsahuje jednočasticový člen a párovaciu interakciu [2] typu protón-protón, neutrón-neutrón.

$$H_\tau = e_\tau \sum_m a_{\tau m}^\dagger a_{\tau m} - \frac{G_\tau}{4} \sum_{m, m'} a_{\tau m}^\dagger \tilde{a}_{\tau m}^\dagger \tilde{a}_{\tau m'} a_{\tau m'}, \quad \tau = p, n. \quad (58)$$

Fermiónové kreačné a anihilačné operátory spĺňajú antikomutačné vzťahy

$$\{a_{\tau m}^\dagger, a_{\tau m'}\} = \delta_{mm'}, \quad \{a_{\tau m}, a_{\tau m'}\} = 0. \quad (59)$$

Prechod ku kvázičasticovému hamiltoniánu je daný Bogoliubov-Valatinovou transformáciou [1, 2, 3] separátne pre protóny a neutróny.

$$\alpha_{\tau m}^\dagger = u_\tau a_{\tau m}^\dagger - v_\tau \tilde{a}_{\tau m}, \quad \tilde{\alpha}_{\tau m} = v_\tau a_{\tau m}^\dagger + u_\tau \tilde{a}_{\tau m}. \quad (60)$$

Pre kvázičasticové operátory požadujeme splnenie antikomutačných vzťahov.

$$\{\alpha_{\tau m}^\dagger, \alpha_{\tau m'}\} = \delta_{mm'}, \quad \{\alpha_{\tau m}, \alpha_{\tau m'}\} = 0. \quad (61)$$

V dôsledku párovacej interakcie sú vytvárané páry nukleónov s opačným uhlovým momentom, čo má za následok rozmazanie Fermiho hladiny. V našom modelovom prípade predpokladáme sféricky symetrický stredný potenciál, preto sú jednočasticové hladniny charakterizované kvantovými číslami n, j, m . Kvadrát amplitúdy v_τ^2 má zmysel obsadenia hladiny $|njm\rangle_\tau$, u_τ^2 reprezentuje pravdepodobnosť, že stav $|njm\rangle_\tau$ je neobsadený, preto musí platiť $u_\tau^2 + v_\tau^2 = 1$.

Kvázičasticový hamiltonián má vo všeobecnom prípade tvar

$$H = H_0 + H_2 + H_{int}. \quad (62)$$

Člen H_0 neobsahuje kvázičasticové operátory α , H_2 zahŕňa členy typu $\alpha^\dagger \alpha^\dagger, \alpha \alpha, \alpha^\dagger \alpha$ a H_{int} obsahuje kombinácie 4 kvázičasticových operátorov [2]. Koeficienty u_τ, v_τ hľadáme z podmienky diagonálnosti H_2 , čo v našom modelovom prípade znamená

$$H_2 = \sum_m \epsilon_\tau \alpha_{\tau m}^\dagger \alpha_{\tau m}. \quad (63)$$

Pre prípad nukleónov pohybujúcich sa vo sféricky symetrickom strednom poli v jednej vrstve s uhlovým momentom j sú energie kvázičastíc ϵ rovnaké a podmienka (63) vedie k rovniciam

$$\begin{aligned}(\varepsilon_\tau - \epsilon_\tau)u_\tau + \Delta v_\tau &= 0 \\ \Delta u_\tau - (\varepsilon + \epsilon_\tau)u_\tau &= 0.\end{aligned}\tag{64}$$

Energia ε_τ predstavuje energiu jednočasticového stavu meranú vzhľadom na fermiho hladinu $\varepsilon = \varepsilon' - \lambda$. Parameter Δ_τ (tzv. *gap* parameter) je definovaný vzťahom

$$\Delta_\tau = G_\tau \sum_{m>0} u_\tau v_\tau = G_\tau (2j+1) u_\tau v_\tau.\tag{65}$$

Vo všeobecnosti predstavuje simultánne riešenie BCS rovnice (64) spolu s gap rovnicou (65) pomerne zložitý problém, ktorý sa rieši numericky. V našom schématickom modeli je možné rovnice explicitne vyriešiť a pre u_τ, v_τ dostávame

$$v_\tau = \sqrt{\frac{N_\tau}{2\Omega}}, \quad u_\tau = \sqrt{1 - \frac{N_\tau}{2\Omega}}.\tag{66}$$

N_τ predstavuje stredný počet kvázičastíc v stave $|BCS\rangle$, pre ktorý požadujeme, aby bol rovný počtu častíc, teda $N_p \equiv Z$, $N_n \equiv N$. Kvázičasticová a časticová energia spolu súvisia vzťahom $\epsilon_\tau = \sqrt{\varepsilon_\tau^2 + \Delta_\tau^2}$.

B Marumoriho mapovanie

Semiklasický výpočet aj QRPA-OGS sme formulovali v bozónovom priestore. Pre všetky fermiónové operátory vystupujúce vo výpočtoch je preto potrebné mapovacou procedúrou nájsť ich bozónové obrazy. Existuje viacero mapovacích postupov (Dyson, Holstein-Primakoff, Belyaev-Zelevinski [1]), preto bozónový obraz fermiónového operátora nie je jednoznačný. V tejto práci je použitá schéma bozónového mapovania podrobne diskutovaná v [27, 28, 29].

Nech $B^\dagger$, B je kreačný resp. anihilačný bozónový operátor a stav $|0\rangle$ označuje zodpovedajúce vákuum. Operátory spĺňajú bozónový komutačný vzťah

$$[B, B^\dagger] = 1, \quad B|0\rangle = 0.$$

Definujeme bozónový priestor $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} \equiv \left\{ |0\rangle, |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1!}}B^\dagger|0\rangle, |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}B^\dagger B^\dagger|0\rangle, \dots |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(B^\dagger)^n|0\rangle, \quad 0 \leq n \leq 2\Omega \right\}.$$

a fermiónový priestor $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \left\{ |0\rangle, |1\rangle = A^\dagger|0\rangle, |2\rangle = A^\dagger A^\dagger|0\rangle, \dots |n\rangle = (A^\dagger)^n|0\rangle, \quad 0 \leq n \leq 2\Omega \right\}.$$

Každému stavu v bozónovom priestore $|n\rangle$ zodpovedá vo fermiónovom priestore stav $|n\rangle$. Obrazom fermiónového operátora O_F v $\mathcal{B}$ priestore je operátor O_B , pre ktorý požadujeme rovnosť zodpovedajúcich maticových elementov:

$$\frac{1}{\sqrt{N_n}} \frac{1}{\sqrt{N_{n'}}} \langle n|O_F|n'\rangle = \langle n|O_B|n'\rangle, \quad 0 \leq n, n' \leq 2\Omega, \quad (67)$$

$$N_n = \langle 0|A^n(A^\dagger)^n|0\rangle = \frac{n!(2\Omega)!}{(2\Omega-n)!(2\Omega)^n}.$$

Keďže priestory $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ sú tvorené ortogonálnymi stavmi (resp. ich lin. kombináciami), podmienka (67) zaručuje, že všetky vlastné hodnoty operátora O_F v priestore $\mathcal{F}$ sú aj vlastnými hodnotami operátora O_B v priestore $\mathcal{B}$.

Postup mapovania ilustrujeme na príklade operátora A . Bozónový obraz operátora A je daný rozvojom

$$A_B = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} (B^\dagger)^i (B^\dagger)^j = a_{10}B + a_{21}B^\dagger BB + a_{32}B^\dagger B^\dagger BBB + \dots \quad (68)$$

Koeficient a_{10} určíme z rovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{N_0}} \frac{1}{\sqrt{N_1}} \langle 1 | A^\dagger | 0 \rangle = (1 | a_{10} B^\dagger | 0),$$

koeficient a_{21} z rovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{N_1}} \frac{1}{\sqrt{N_2}} \langle 2 | A^\dagger | 1 \rangle = (2 | a_{10} B^\dagger + a_{21} B^\dagger B^\dagger B | 1),$$

a analogicky postupujeme pri výpočte ďalších členov a_{ij} . Pritom z ortogonalít stavov $\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$, $\langle n | n' \rangle = N_n N_{n'} \delta_{nn'}$ je zrejmé, že v sume (68) sú nenulové iba niektoré členy.

Pri výpočtoch sa zvyčajne ohraničíme na niekoľko prvých členov bozónového rozvoja príslušného operátora. Bozónový obraz operátora je v takom prípade neúplný a rovnosť maticových elementov (67) je splnená len na určitom podpriestore $\mathcal{B}^{(k)}$ priestoru $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B}^{(k)} \equiv \left\{ |0\rangle, |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1!}} B^\dagger |0\rangle, |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} B^\dagger B^\dagger |0\rangle, \dots |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k!}} (B^\dagger)^k |0\rangle \right\}$$

Čím väčšia je dimenzia podpriestoru $\mathcal{B}^{(k)}$, pre ktorý je podmienka (69) splnená, tým presnejší bozónový obraz O_B fermiónového operátora O_F dosiahneme.

C Maticové elementy

Vlnová funkcia v QRPA-OGS výpočtoch je daná anatzom:

$$|rpa\rangle \equiv e^T e^S |\rangle, \quad (69)$$

kde $T = t^* B - TB^\dagger$, $S = zB^\dagger B^\dagger - z^* BB$ a t , z sú komplexné parametre: $z = \rho e^{i\phi}$, $t = r e^{i\theta}$. Operátor e^S je možné faktorizovať:

$$e^S = e^{zB^\dagger B^\dagger - z^* BB} = e^{\alpha B^{\dagger 2}} e^{\beta 2 + 4B^\dagger B} e^{\gamma B^2}, \quad (70)$$

pričom pre α , β , γ platí:

$$\alpha = \frac{1}{2} e^{i\phi} \tanh(2\rho), \quad \beta = -\frac{1}{4} \ln(\cosh(2\rho)), \quad \gamma = -\frac{1}{2} e^{-i\phi} \tanh(2\rho). \quad (71)$$

Použitím operátorového rozvoja

$$e^{-\tau \hat{b}} \hat{a} e^{\tau \hat{b}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \overbrace{[\hat{b}, [\hat{b} \dots [\hat{b}, \hat{a}] \dots]]}^{n - \text{krát}} \quad (72)$$

a faktorizácie (70) nájdeme vzťahy

$$\begin{aligned} e^{-S} B^\dagger e^S &= \cosh(2\rho) B^\dagger + e^{-i\phi} \sinh(2\rho) B, & e^{-T} B^\dagger e^T &= B^\dagger - t^*, \\ e^{-S} B e^S &= e^{i\phi} \sinh(2\rho) B^\dagger + \cosh(2\rho) B, & e^{-T} B e^T &= B - t. \end{aligned} \quad (73)$$

Pomocou vyjadrení (73) a komutačných vzťahov pre B , $B^\dagger$ vieme vypočítať maticové elementy $\langle RPA | (B^\dagger)^i B^j | RPA \rangle$. V QRPA-OGS výpočtoch boli potrebné nasledujúce maticové elementy (zaviedli sme substitúciu $v = \sinh \rho$, $u = \cosh \rho$):

$$\begin{aligned} \langle RPA | B | RPA \rangle &= -e^{-i\theta} r \\ \langle RPA | B^\dagger BB | RPA \rangle &= -i \sin \theta (2v^2 r + r^3) - \cos \theta (2v^2 r + r^3) - uvr \cos(\theta - \phi) \\ &\quad + iuvr \sin(\theta - \phi) \\ \langle RPA | B^\dagger B | RPA \rangle &= v^2 + u^2 \\ \langle RPA | BB | RPA \rangle &= e^{-i\phi} uv + r^2 e^{-2i\theta} \\ \langle RPA | BBBB | RPA \rangle &= 3e^{2i\phi} u^2 v^2 + 6uvr^2 e^{i(\phi+2\theta)} + r^4 e^{4i\theta} \\ \langle RPA | B^\dagger BBB | RPA \rangle &= 3e^{i\phi} (uv^3 + uvr^2) + e^{i2\theta} (3v^2 r^2 + r^4) \\ \langle RPA | B^\dagger B^\dagger B^\dagger BB | RPA \rangle &= 2uvr^2 \cos(2\theta - \phi) + u^2 v^2 + r^4 + 2v^4 + 4v^2 r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle RPA|B^\dagger B^\dagger BBB|SPA\rangle &= -(3uvr^3 + 6uv^3r)e^{-i(\theta-\phi)} \\
&\quad - (6v^2r^3 + 6v^4r + r^5 + 3u^2v^2r)e^{i\theta} - uvr^3e^{i(3\theta-\phi)} \\
\langle RPA|B^\dagger BBBBB|SPA\rangle &= 15e^{2i\phi}(u^2v^4 + uv^2r^2) \\
&\quad + 10e^{i(\phi+2\theta)}(3uv^3r^2 + uvr^4) + e^{4i\theta}(5v^2r^4 + r^6) \\
\langle RPA|B^\dagger B^\dagger B^\dagger BBB|SPA\rangle &= \cos(2\theta - \phi)(18uv^3r^2 + 6uvr^4) + 9u^2v^4 \\
&\quad + 9u^2v^2r^2 + 6v^6 + 18v^4r^2 + r^6 + 9v^2r^4 \\
\langle RPA|B^\dagger B^\dagger BBBB|SPA\rangle &= e^{i\phi}(6uvr^4 + 12uv^5 + 24uv^3r^2 + 3u^3v^3) \\
&\quad + e^{2i\theta}(r^6 + 6u^2v^2r^2 + 12v^4r^2 + 8v^2r^4) + 3e^{2i(\theta-\phi)}u^2v^2r^2 + e^{i(4\theta-\phi)}uvr^4 \\
\langle RPA|B^\dagger B^\dagger B^\dagger BBBB|SPA\rangle &= -(3uvr^5 + 12uv^3r^3)e^{i(3\theta-\phi)} \\
&\quad - (9u^3v^3r + 36uv^5r + 36uv^3r^3 + 6uvr^5)e^{-i(\theta-\phi)} - 3r^3u^2v^2e^{-i(3\theta-2\phi)} \\
&\quad - (36u^2v^4r + 18u^2v^2r^3 + 24v^6r + 36v^4r^3 + r^7 + 12v^2r^5)e^{i\theta} \\
\langle RPA|B^\dagger B^\dagger B^\dagger B^\dagger BBBB|SPA\rangle &= 6u^2v^2r^4 \cos(4\theta - 2\phi) \\
&\quad + (96uv^3r^4 + 12uvr^6 + 36u^3v^3r^2 + 144uv^5r^2) \cos(2\theta - \phi) \\
&\quad + 9u^4v^4 + 24v^8 + 36u^2v^2r^4 + 72u^2v^6 + 144u^2v^4r^2 + 96v^6r^2 \\
&\quad + r^8 + 72v^4r^4 + 16v^2r^6 \\
\langle RPA|B^\dagger B^\dagger B^\dagger BBBBB|SPA\rangle &= e^{2i(\theta-\phi)}(45u^2v^4r^2 + 15u^2v^2r^4) \\
&\quad + e^{i\phi}(90uv^3r^4 + 60uv^7 + 45u^3v^5 + 45u^3v^3r^2 + 10uvr^6 + 180uv^5r^2) \\
&\quad + e^{2i\theta}(60v^4r^4 + 60v^6r^2 + 90u^2v^4r^2 + 30u^2v^2r^4 + r^8 + 15v^2r^6) \\
&\quad + e^{i(4\theta-\phi)}(15uv^3r^4 + 3uvr^6)
\end{aligned}$$

Maticové elementy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ vystupujúce v QRPA rovnici (29) nájdeme pomocou predchádzajúcich vzťahov.

$$\mathcal{A} \equiv \langle rpa|[B, H_B, B^\dagger]|rpa\rangle = A_6r^6 + A_4r^4 + A_2r^2 + A_0 \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= \alpha_{11} + 4\alpha_{22}v^2 + 6\alpha_{13}uv \cos(\phi) + 48\alpha_{24}uv^3 \cos(\phi) \\
&\quad + 90\alpha_{35}[u^3v^3 + 4uv^5] \cos(\phi) \\
A_2 &= 4\alpha_{22} + 6\alpha_{13} \cos(2\theta) + 48\alpha_{24}[v^2 \cos(2\theta) + uv \cos(\phi)] \\
&\quad + 90\alpha_{35}[4v^4 \cos(2\theta) + 8uv^3 \cos(\phi) + u^2v^2 \cos(2\theta - 2\phi) + 2u^2v^2 \cos(2\theta)] \\
A_4 &= 16\alpha_{24} \cos(\theta) + 30\alpha_{35}[uv \cos(-\phi + 4\theta) + 6u^2 \cos(\phi) + 8uv \cos(2\theta)] \\
A_6 &= 30\alpha_{35} \cos(2\theta)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B} \equiv \langle rpa | [B, H_B, B] | rpa \rangle = B_6 r^6 + B_4 r^4 + B_2 r^2 + B_0 \quad (75)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 2\alpha_{20} + \alpha_{22}[2uv \cos(\phi) + 2i uv \sin(\phi)] + 6\alpha_{13}v^2 \\ &\quad + 6\alpha_{24}[i u^2 v^2 \sin(2\phi) + u^2 v^2 \cos(2\phi) + 4v^4 + 2u^2 v^2] \\ &\quad + 30\alpha_{35}[4v^6 + 6u^2 v^4 + 3u^2 v^4 \cos(2\phi) + 3i u^2 v^4 \sin(2\phi)] \\ B_2 &= 2\alpha_{22}[i \sin(2\theta) + \cos(2\theta)] + 6\alpha_{13} + \\ &\quad + 12\alpha_{24}[2uv \cos(2\theta - \phi) + i uv \sin(\phi + 2\theta) + 3v^2 + uv \cos(\phi + 2\theta)] \\ &\quad + 90\alpha_{35}[2uv^3 \cos(\phi + 2\theta) + u^2 v^2 \cos(2\phi) + 2i uv^3 \sin(\phi + 2\theta) + 2u^2 v^2 \\ &\quad + 4v^4 + i u^2 v^2 \sin(2\phi) + 4 \cos(2\theta - \phi) uv^3] \\ B_4 &= 2\alpha_{24}[(6 + i \sin(4\theta) + \cos(4\theta))] + \\ &\quad + 30\alpha_{35}[2i uv \sin(\phi + 2\theta) + 2uv \cos(\phi + 2\theta) + 4uv \cos(2\theta - \phi) + 6v^2 \\ &\quad + i v^2 \sin(4\theta) + v^2 \cos(4\theta)] \\ B_6 &= 2\alpha_{35}[10 + 3i \sin(4\theta) + 3 \cos(4\theta)] \end{aligned}$$

Pre strednú hodnotu bozónového hamiltoniánu $H_B^{(1)}$ v stave $|RPA\rangle$ dostaneme

$$\mathcal{H} \equiv \langle rpa | H_B | rpa \rangle = H_8 r^8 + H_6 r^6 + H_4 r^4 + H_2 r^2 + H_0. \quad (76)$$

$$\begin{aligned} H_0 &= \alpha_{11}v^2 + 2\alpha_{20}uv \cos(\phi) + \alpha_{22}[u^2 v^2 + 2v^4] + 6\alpha_{13}uv^3 \cos(\phi) \\ &\quad + 6\alpha_{24}[4uv^5 \cos(\phi) + u^3 v^3 \cos(\phi)] + 30\alpha_{35}[3u^3 v^5 \cos(\phi) + 4uv^7 \cos(\phi)] \\ H_2 &= \alpha_{11} + 2\alpha_{20} \cos(2\theta) + 2\alpha_{22}[2v^2 + uv \cos(2\theta - \phi)] \\ &\quad + 6\alpha_{13}[v^2 \cos(2\theta) + uv \cos(\phi)] \\ &\quad + 6\alpha_{24}[2u^2 v^2 \cos(2\theta) + 4v^4 \cos(2\theta) + 8uv^3 \cos(\phi) + u^2 v^2 \cos(2\theta - 2\phi)] \\ &\quad + 30\alpha_{35}[4v^6 \cos(2\theta) + 12uv^5 \cos(\phi) + 6u^2 v^4 \cos(2\theta) + 3u^2 v^4 \cos(2\theta - 2\phi) \\ &\quad + 3u^3 v^3 \cos(\phi)] \\ H_4 &= \alpha_{22} + 2\alpha_{13} \cos(2\theta) + 2\alpha_{24}[6uv \cos(\phi) + 8v^2 \cos(2\theta) + uv \cos(-\phi + 4\theta)] \\ &\quad + 30\alpha_{35}[6uv^3 \cos(\phi) + u^2 v^2 \cos(2\theta - 2\phi) + 2u^2 v^2 \cos(2\theta) + 4v^4 \cos(2\theta) \\ &\quad + uv^3 \cos(-\phi + 4\theta)] \\ H_6 &= 2\alpha_{24} \cos(2\theta) + 2\alpha_{35}[3uv \cos(-\phi + 4\theta) + 10uv \cos(\phi) + 15v^2 \cos(2\theta)] \\ H_8 &= 2\alpha_{35} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Literatúra

- [1] P. Ring a P. Schuck, *The Nuclear Many-body problem* (Springer, New York, 1980).
- [2] J. M. Eisenberg a W. Greiner, *Microscopic theory of the nucleus* (North-Holland Physics Publishing, Amsterdam 1972).
- [3] V. G. Soloviev, *Teoria atomnovo jadra* (Energoizdat, Moskva, 1981).
- [4] W. C. Haxton a G. J. Stephenson, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **12**, 409 (1984).
- [5] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961).
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [7] A. Salam, *Elementary particle Theory: Relativistic Groups and Analycity (Proc. 8th Nobel Symp.) ed. N. Svarholm (Stokholm: Almqvist and Wiksell)*, 367 (1968).
- [8] M. Goeppert-Mayer, *Phys. Rev* **48**, 512 (1935).
- [9] L. Baudis a kol., *Phys. Lett. B* **407**, 219 (1997).
- [10] P. Vogel a M. R. Zirnbauer *Phys. Rev. Lett.* **57**, 731 (1986).
- [11] J. Engel, P. Vogel a M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. E* **37**, 731 (1988).
- [12] K. Muto, E. Bender a V. Klapdor, *Z. Phys. A* **334**, 177 (1989).
- [13] J. Toivanen a J. Suhonen, *Phys. Rev. Lett* **75** 410 (1995); *Phys. Rev. C* **55**, 2314 (1997)
- [14] J. G. Hirsch, P. O. Hess a O. Civitarese, *Phys. Rev C* **54**, 1976 (1996)
- [15] O. Civitarese, A. Faessler a T. Tomoda, *Phys. Lett B* **194**, 11 (1987)
- [16] F. Šimkovic, A. A. Raduta, M. Veselský a A. Faessler, *Phys. Rev. C* **61**, 044319 (2000)

- [17] A. A. Raduta, O. Haug, F. Šimovic a A. Faessler, *J. Phys. G* **26** 1327 (2000);
Nucl. Phys. A **671** 255 (2000)
- [18] F. Šimkovic, M. Šmotlák a A. A. Raduta, *J. Phys. G* **27**, 1757 (2001).
- [19] H. J. Lipkin, N. Meshkov a S. Glick, *Nucl. Phys. A* **62**, 188 (1965).
- [20] T. Marumori, M. Yamamura a A. Tokunaga, *Prog. Theor. Phys.* **31**, 1009 (1964).
- [21] W. Fury, *Phys. Rev.* **56**, 1184 (1939).
- [22] V. A. Kuzmin a V. G. Soloviev, *Nucl. Phys. A* **486**, 118 (1988).
- [23] J. Schwieger, F. Šimkovic a A. Faessler, *Nucl. Phys. A* **600**, 179 (1996).
- [24] F. Krmpotić, T. T. S. Kuo, A. Mariano, E. J. V. de Passos a A. F. R. de Toledo Piza, *Nucl. Phys. A* **612**, 223 (1997); *Fiz. B* **5**, 93 (1996).
- [25] O. Civitarese a J. Suhonen, *J. Phys. G* **20**, 1441 (1994).
- [26] O. Civitarese, J. Suhonen a A. Faessler, *Nucl. Phys. A* **591**, 195 (1995).
- [27] M. Sambataro, *Phys. Rev. C* **59**, 2056 (1999).
- [28] M. Sambataro a J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **56**, 782 (1997).
- [29] M. Sambataro, *Phys. Rev. C* **52**, 3378 (1995).
- [30] K. Ikeda, *Prog. Theor. Phys.* **31**, 434 (1964).
- [31] K. Ikeda, S. Fujita a J. I. Fujita, *Phys. Lett.* **3**, 271 (1963).
- [32] J. I. Fujita, K. Ikeda, *Prog. Theor. Phys.* **36**, 288 (1966).
- [33] A. Faessler a F. Šimkovic, *J. Phys. G* **24**, 2139 (1998).
- [34] G. F. Bertsch, P. F. Bortignon, K. Hagino, *Nucl. Phys. A* **657**, 59 (1999).
- [35] A. N. Storozhneko, D. S. Kosov, A. I. Vdovin, preprint server LANL.

- [36] E. J. V. Passos, A. F. R. de Toledo Piza, F. Krmpotić, *Phys. Rev. C* **58**, 1841 (1998).
- [37] F. Catara, N. Dinh Dang, M. Sambataro, *Nucl. Phys. A* **579**, 1 (1994).
- [38] C. Volpe, P. Chomaz, M. V. Andrés, F. Catara, E. G. Lanza, *Nucl. Phys. A* **647** 246 (1999).
- [39] M. Grasso, F. Catara, *Phys. Rev. C* **63**, 014317 (2000).
- [40] K. Hagino, G. F. Bertsch, *Phys. Rev. C* **61**, 02307 (2000).
- [41] N. Debergh, F. Stancu, *J. Phys. A* **34**, 3265 (2001).