

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
BRATISLAVA

Katedra jadrovej fyziky

Kolektívne excitácie mnohonukleónových systémov:
Výpočty β a $\beta\beta$ prechodov v rámci
schematických modelov

Projekt dizertačnej práce

Mgr. Martin Šmotlák

Školiteľ: RNDr. Fedor Šimkovic, Csc.

Bratislava 2001

Obsah

1	Úvod	3
2	Súčasný stav problematiky	6
2.1	Dvojneutrínový dvojitý beta-rozpad a štruktúra jadra	6
2.2	QRPA a jej modifikácie	9
2.3	Štúdie v rámci schematických modelov	13
2.3.1	Protón-neutrónový Lipkinov model	13
2.3.2	QRPA a Pauliho vylučovací princíp	15
2.3.3	Semiklasický opis excitácie mnohonukleónového systému	19
3	Ciele práce	22
4	Projekt práce, dosiahnuté výsledky	24
4.1	QRPA s optimálnym základným stavom	24
4.2	Výpočet Greenových funkcií $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezen- tácii.	29
4.3	Aplikácia metódy PP-QRPA na realistický opis $2\nu\beta\beta$ -prechodov	34
	Literatúra	37

1 Úvod

Spôľahlivý opis štruktúry jadra, t.j. mnohonukleónových sústav, predstavuje aj v súčasnosti jeden z hlavných problémov fyziky atómového jadra. Jednu z mnohých motivácií, ktoré stimulujú vývoj nových mnohonukleónových metód, predstavuje dvojitý beta-rozpad ($\beta\beta$ -rozpad) jadier [1]. Tento zriedkavý jadrový proces je dôležitý nielen z hľadiska rôznych aspektov jadrovej fyziky, ale aj z hľadiska platnosti postulátov štandardného modelu elektroslabých interakcií (ŠM) a možnej existencie novej fyziky mimo jeho rámca. Rozlíšujeme dve nasledovné módy $\beta\beta$ -rozpadu:

- dvojneutrínový $\beta\beta$ -rozpad ($2\nu\beta\beta$ -rozpad)

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\tilde{\nu}_e$$

- bezneutrínový $\beta\beta$ -rozpad ($0\nu\beta\beta$ -rozpad)

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + 2e^-$$

Amplitúdy obidvoch mód $\beta\beta$ -premeny vyžadujú konštrukciu tých istých vlnových funkcií príslušných jadier. Predmetom záujmu je vytvoriť spoľahlivý model pre opis uvedených jadrových prechodov.

$2\nu\beta\beta$ -rozpad je dovolený v rámci ŠM a predstavuje v súčasnosti najzriedkavejší pozorovaný proces v prírode. Experimentálne bol priamo detekovaný na niekoľkých jadrách [1]. Prevrátená hodnota polčasu rozpadu je daná súčinom fázového faktora a kvadrátu jadrového maticového elementu pre tento prechod [1]. Nameraný polčas rozpadu priamo určuje hodnotu jadrového maticového elementu. Z uvedeného dôvodu $2\nu\beta\beta$ -premena predstavuje citlivý test pre správnosť opisu štruktúry jadra.

Bezneutrínový mód $\beta\beta$ -rozpadu sa realizuje v prírode za predpokladu narušenia zákona zachovania leptónového náboja (dochádza k jeho zmene o dve jednotky), t.j. daný proces nie je dovolený v rámci ŠM. Mnohé rozšírenia ŠM (teórie veľkého zjednotenia, supersymetrické teórie a ďalšie) predpokladajú slabé narušenie zákona zachovania leptónového náboja. V rámci týchto teórií existuje viacero mechanizmov pre opis $0\nu\beta\beta$ -premeny. Prevrátená hodnota polčasu rozpadu je daná súčinom fázového faktora, kvadrátu jadrových maticových elementov a parametrov súvisiacich s narušením leptónového náboja [2], ktorými sú napríklad efektívna hmotnosť Majoranovských neutrín, parametre pravých tokov, R -paritu narušujúce parametre supersymetrických teórií... Bezneutrínový mód $\beta\beta$ -premeny experimentálne pozorovaný nebol. Sú známe len dolné ohraničenia na polčasy rozpadov jednotlivých izotopov [3]. Z hľadiska získania čo najpresnejších ohraničení na

parametre nezachovania leptónového náboja je dôležitý presný a spoľahlivý výpočet jadrových maticových elementov.

Pre opis $\beta\beta$ -jadrových prechodov boli použité rozličné metódy [1]. Jednou z nich je vrstvomý model, ktorý je schopný úspešne vysvetliť základné vlastnosti a charakteristiky ľahkých jadier. Avšak $\beta\beta$ -rozpad prebieha na stredne ťažkých a ťažkých jadrách s komplikovanou štruktúrou. V rámci vrstvomého modelu, ktorý dobre opisuje nízko ležiace kolektívne excitácie jadier, nie je možné skonštruovať úplnú sústavu vzbuđených stavov prechodného jadra, potrebnú pri určení amplitúdy $\beta\beta$ -premeny. Aj pre najľahšie jadrové systémy podliehajúce $\beta\beta$ -rozpadu sa nezaobídeme bez podstatného ohraničenia modelového priestoru konfiguračných stavov, čo značne ovplyvňuje hodnotu výsledného maticového elementu.

Pre výpočet jadrových prechodov dvojitého beta-rozpadu sa v súčasnosti najviac používa **kvázičasticové priblíženie náhodných fáz** (QRPA)¹ [4, 5]. Napriek tomu, že táto jadrová-štruktúrna metóda a jej modifikácie sa úspešne používajú už mnoho rokov, ich predpovedaciu schopnosť znižuje fakt, že počítané maticové elementy $\beta\beta$ -prechodu citlivo závisia od parametrov jadrového hamiltoniánu (konkrétne od parametra g^{pp} , ktorým sa renormalizuje časticovo-časticový kanál zbytkovej interakcie) a v oblasti ich fyzikálnych hodnôt ($g^{pp} \approx 1$) sú veľmi nestabilné už pri malej zmene tohto parametra [5]. Na dôvažok riešenie QRPA v okolí $g^{pp} = 1$ kolabuje. Predpokladaným dôvodom je narušenie Pauliho princípu v rámci QRPA, ako aj nezachovanie počtu častíc. Renormalizovaná QRPA (RQRPA) [6, 7] čiastočne berie do úvahy Pauliho princíp, čím znižuje citlivosť týchto maticových elementov na vzrastajúcu silu časticovo-časticovej interakcie. Nedostatkom RQRPA však je, že nespĺňa Ikedovo sumačné pravidlo [9]. Nerieši tiež problém neekvivalenosti vzbuđených stavov prechodného jadra, konštruovaných z počiatočného a konečného jadra (podobne ako aj QRPA).

V súčasnosti existujú štúdie [10, 11], ktoré vysvetľujú nestabilitu a kolaps maticových elementov $\beta\beta$ -premeny v oblasti fyzikálnych hodnôt g^{pp} fázovým prechodom (reorganizáciou nukleónov v jadre) a hľadajú nové riešenia v zmenenom základnom stave jadra (za fázovým prechodom). Indikácia tohto javu má pôvod v semiklasickom opise mnohonukleónových systémov [11].

Otázka opisu jadrovej štruktúry a výpočtu Greenových funkcií β a $\beta\beta$ -prechodov je preto stále otvorená a aktuálna. Je tendencia vyvíjať nové metódy a skúmať nedostatky realistických výpočtov v schematických modeloch. V projekte je podrobne sformulovaný problém výpočtu jadrových maticových elementov $\beta\beta$ -rozpadu v rámci QRPA a jej modifikácií. Predmetom diskusií je súčasný stav vo vývoji nových metód pre opis jadra a

¹z anglického Quasiparticle Random Phase Approximation

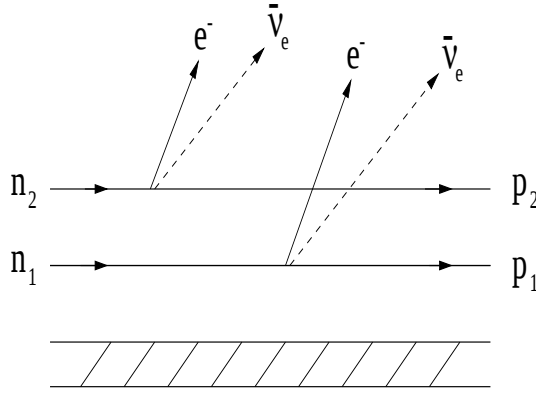
jadrových prechodov pomocou schematických modelov s dôrazom na model navrhnutý Kuzminom a Solovievom, resp. protón-neutrónový Lipkinov model [9, 10, 11, 13, 22]. V ďalšej časti sú sformulované hlavné ciele projektu v spojitosti s čiastkovými úlohami. Súčasný stav riešenia spomenutých cieľov projektu, ako aj podrobnejší opis jednotlivých prístupov spolu s niektorými dosiahnutými výsledkami, sú prezentované v záverečnej kapitole. Zoznam použitej literatúry je uvedený v poslednej časti danej práce.

2 Súčasný stav problematiky

2.1 Dvojneutrínový dvojitý beta-rozpad a štruktúra jadra

$2\nu\beta\beta$ -rozpad bol priamo pozorovaný na viacerých jadrách (napríklad ^{48}Ca , ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{116}Cd , ^{150}Nd [3]). Presnosť teoretického výpočtu polčasu rozpadu výrazne závisí od opisu štruktúry prechodového jadra. Nameňované hodnoty $T_{1/2}^{2\nu\beta\beta}$ umožňujú porovnávať jadrové maticové elementy extrahované z experimentu s hodnotami, ktoré sa získajú počítaním v rámci daného jadrového modelu. Z uvedeného dôvodu je $2\nu\beta\beta$ -premena významná z hľadiska testu použitej jadrové-štruktúrnej metódy.

Predpokladá sa, že dvojnukleónový mechanizmus je dominantný pre danú jadrovú premenu [1] (viď obr. 1). $2\nu\beta\beta$ -rozpad je v tomto prípade procesom



Obrázok 1: Diagram pre dvojnukleónový mechanizmus $2\nu\beta\beta$ -rozpadu.

druhého rádu v rámci Fermiho teórie β -rozpadu. Nenulový vklad do matice prechodu dá druhý člen v rozvoji operátora S -matice [12]:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = & \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 N_{p1} N_{k1} N_{p2} N_{k2} L_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) J_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) - \\ & (p_1 \leftrightarrow p_2) - (k_1 \leftrightarrow k_2) - (p_1 \leftrightarrow p_2)(k_1 \leftrightarrow k_2), \end{aligned} \quad (1)$$

kde

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) = & \bar{u}(p_1) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u(-k_1) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu (1 + \gamma_5) u(-k_2), \\ N_p = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$J_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) = \int e^{-i(p_1+k_1)x_1} e^{-i(p_2+k_2)x_2} \langle \text{out} | T(J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)) | \text{in} \rangle dx_1 dx_2. \quad (3)$$

$|\text{in}\rangle$ a $|\text{out}\rangle$ sú vlnové funkcie pôvodného a výsledného jadra, p_1, p_2 (k_1, k_2) sú štvorhybnosti vyletujúcich elektrónov (antineutrín). $J_\mu(x_1), J_\nu(x_2)$ sú hadrónové toky v Heisenbergovej reprezentácii:

$$J_\mu(x) = e^{iHt} J_\mu(\vec{x}, 0) e^{-iHt}, \quad (4)$$

kde H je jadrový hamiltonián.

Matica prechodu (1) obsahuje príspevok od dvoch neskorelovaných jednoduchých β -rozpadov a $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Aby sme separovali obidva procesy, vyjadríme T -súčin dvoch hadrónových tokov nasledovne [14]:

$$T(J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)) = J_\mu(x_1)J_\nu(x_2) + \Theta(x_{20} - x_{10})[J_\nu(x_2), J_\mu(x_1)]. \quad (5)$$

V práci [8, 12] je ukázané, že prvý člen na pravej strane rovnice (5) je spojený s dvomi po sebe nasledujúcimi β -prechodmi, čo je pre väčšinu $\beta\beta$ -rozpadajúcich sa jadier energeticky zakázané. Komutátor hadrónových tokov v (5) prislúcha $2\nu\beta\beta$ -premene. Dôležitým poznatkom podrobne ukázaným v [12] je fakt, že pre $2\nu\beta\beta$ -proces je rozhodujúca reziduálna interakcia v jadrovom hamiltoniáne. Ak celkový hamiltonián $H = H^{s.p.} + H^{res}$ aproximujeme len jednočasticovým členom $H^{s.p.}$, potom je maticový element opisujúci $2\nu\beta\beta$ -premenu nulový, lebo komutátor hadrónových tokov v (5) je rovný nule.

Budeme brať do úvahy nasledujúce štandardné aproximácie:

1. dlhovlnné priblíženie $e^{-i(\vec{p}_i + \vec{k}_i)\vec{x}_i} \sim 1$,
2. nerelativistické impulzné priblíženie pre jadrový tok $J_\alpha(\vec{x}, 0)$,
3. uvažujeme len jadrové prechody medzi základnými stavmi pôvodného a konečného jadra: $0_{g.s.i}^+ \rightarrow 0_{g.s.f}^+$,
4. energie vyletujúcich častíc nahradíme ich strednou hodnotou:

$$p_{10} + k_{10} \approx p_{20} + k_{20} \approx \frac{E_i - E_f}{2} \equiv \Delta, \quad (6)$$

kde E_i (E_f) je energia základného stavu pôvodného (výsledného) jadra.

Zahrnutím spomenutých priblížení dostaneme z (3) pre príspevok zodpovedajúci $2\nu\beta\beta$ -prechodu nasledovný výraz

$$J_{\mu\nu}^{2\nu\beta\beta}(p_1, k_1, p_2, k_2) = 2i(g_V^2 M_F^{2\nu} \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - g_A^2 M_{GT}^{2\nu} \delta_{\mu k} \delta_{\nu k}) \times \\ \times 2\pi\delta(E_f - E_i + p_{10} + k_{10} + p_{20} + k_{20}), \quad k = 1, 2, 3. \quad (7)$$

g_A (g_V) je axiálna (vektorová) konštanta, $M_F^{2\nu}$ a $M_{GT}^{2\nu}$ sú Fermiho a Gamow-Tellerov maticové elementy v integrálnej reprezentácii:

$$M_F^{2\nu} = \langle 0_f^+ | \frac{i}{2} \int_0^\infty [A^F(t/2), A^F(-t/2)] dt | 0_i^+ \rangle, \quad (8)$$

$$M_{GT}^{2\nu} = \langle 0_f^+ | \frac{i}{2} \int_0^\infty [A_k^{GT}(t/2), A_k^{GT}(-t/2)] dt | 0_i^+ \rangle. \quad (9)$$

$A^F(t)$, $A_k^{GT}(t)$ označujú príslušné β -prechodové operátory, ktorých závislosť na čase je daná nasledovne:

$$A^F(t) = e^{iHt} A^F(0) e^{-iHt}, \quad A^F(0) = \sum_i \tau_i^+ \quad (10)$$

$$A_k^{GT}(t) = e^{iHt} A_k^{GT}(0) e^{-iHt}, \quad A_k^{GT}(0) = \sum_i \tau_i^+ (\sigma_i)_k \quad k = 1, 2, 3.$$

Predpokladáme, že vlnové funkcie jadier sú vlastnými stavmi hamiltoniánu H . Po vložení úplnej sústavy stavov prechodového jadra $|1_n^+\rangle$ s energiami E_n medzi operátory vystupujúce v (8) a (9) a následnou integráciou cez premennú t dostaneme:

$$M_F^{2\nu} = \sum_n \frac{\langle 0_f^+ | A^F(0) | 1_n^+ \rangle \langle 1_n^+ | A^F(0) | 0_i^+ \rangle}{E_n - E_i + \Delta}, \quad (11)$$

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_n \frac{\langle 0_f^+ | A_k^{GT}(0) | 1_n^+ \rangle \langle 1_n^+ | A_k^{GT}(0) | 0_i^+ \rangle}{E_n - E_i + \Delta}. \quad (12)$$

Výpočet $M_F^{2\nu}$ a $M_{GT}^{2\nu}$ v danej forme vyžaduje konštrukciu úplného spektra stavov $|1_n^+\rangle$ prechodového jadra v rámci vhodného jadrového modelu, napr. pomocou (QRPA) diagonalizácie príslušného jadrového hamiltoniánu. V dôsledku vyššie uvedených bežných priblížení, inverzný polčas $2\nu\beta\beta$ -rozpadu môžeme napísať v nasledovnom faktorizovanom tvare [1, 2]

$$[T_{1/2}^{2\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = G^{2\nu} \left(\frac{g_V}{g_A} \right)^2 M_F^{2\nu} - M_{GT}^{2\nu}|^2, \quad (13)$$

kde $G^{2\nu}$ je kinematický faktor súvisiaci s integráciou cez fázový priestor vyletujúcich leptónov. Presnosť výpočtu $M_F^{2\nu}$, $M_{GT}^{2\nu}$ teda priamo ovplyvňuje hodnotu teoretického polčasu rozpadu $T_{1/2}^{2\nu}$, ktorú je možno porovnať pre viacero jadrových systémov s výsledkom $T_{1/2}^{2\nu-exp}$ získaným z $2\nu\beta\beta$ -experimentu. Problém presného určovania hodnôt $T_{1/2}^{2\nu}$ sa tak redukuje hlavne na výber

vhodného jadrového modelu, ktorý dokáže uspokojivo opísať úplnú sústavu vzbudených stavov $|1_n^+\rangle$ prechodového jadra.

Stojí za zmienku poznamenať, že je možné vyhnúť sa konštrukcii stavov prechodového jadra využitím integrálnej reprezentácie maticových elementov $M_F^{2\nu}$, $M_{GT}^{2\nu}$ (rovnice (8),(9)). K tomu je však potrebné analyticky určiť časovo závislé β -prechodové operátory (10), napr. s využitím ich rozvoja do nekonečného radu komutátorov:

$$e^{iHt}\hat{O}e^{-iHt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \overbrace{[H, [H, \dots, [H, \hat{O} \dots]]}^{k \text{ times}}, \quad \mathcal{O} = A_k^{GT}(0), A^F(0). \quad (14)$$

Bolo by veľmi zaujímavé, ak sa ukázalo možným, uskutočniť takýto ne-tradičný výpočet $2\nu\beta\beta$ -maticových elementov aspoň v rámci schematických modelov.

2.2 QRPA a jej modifikácie

QRPA je jedna z najznámejších metód zaoberajúca sa opisom jadrovej štruktúry pri $\beta\beta$ -rozpade stredne ťažkých a ťažkých jadier. Výhodou QRPA výpočtov oproti vrstvom modelu je, že môže pokryť značný energetický interval vzbudených stavov. Riešením QRPA rovníc sa získa úplná sústava vzbudených stavov prechodového jadra, ktorá je potrebná pre konštrukciu $2\nu\beta\beta$ - maticových elementov (M_F, M_{GT}).

M-tý excitovaný stav s uhlovým momentom J a jeho projekciou M je vytvorený fonónovým operátorom $Q_{JM}^{m\dagger}$ [3]

$$Q_{JM}^{m\dagger}|0_{RPA}^+\rangle = |m, JM\rangle, \quad Q_{JM}^m|0_{RPA}^+\rangle = 0, \quad (15)$$

kde $|0_{RPA}^+\rangle$ je základný stav pôvodného alebo výsledného jadra. Fonónový operátor

$$Q_{JM}^{m\dagger} = \sum_{pn} \{X_{pn}^m A^\dagger(pn; JM) - Y_{pn}^m \tilde{A}(pn; JM)\} \quad (16)$$

obsahuje voľné variačné amplitúdy X_{pn}^m , Y_{pn}^m a kreačné a anihilačné operátory páru kvázičastíc viazaných do uhlového momentu J s projekciou M

$$A^\dagger(pn; JM) = \sum_{m_p, m_n} C_{j_p m_p j_n m_n}^{JM} \alpha_{p m_p}^\dagger \alpha_{n m_n}^\dagger, \quad (17)$$

$$\tilde{A}(pn; JM) = (-1)^{J+M} \sum_{m_p, m_n} C_{j_p m_p j_n m_n}^{J-M} \alpha_{n m_n} \alpha_{p m_p}.$$

QRPA rovnice možno odvodiť s využitím vzťahov (15) a (16) nasledujúcim postupom [21]:

1. predpokladáme, že $|0_{RPA}^+\rangle$, $|m; JM\rangle$ sú vlastné stavy jadrového hamiltoniánu H :

$$H|m; JM\rangle = E_m|m; JM\rangle \quad , \quad H|0_{RPA}^+\rangle = E_0|0_{RPA}^+\rangle,$$

2. odčítaním uvedených rovníc a použitím označenia $\Omega_m = E_m - E_0$ máme:

$$[H, Q_{JM}^{m\dagger}]|0_{RPA}^+\rangle = \Omega_m Q_{JM}^{m\dagger}|0_{RPA}^+\rangle,$$

3. vynásobením poslednej rovnice variačným stavom $\langle 0_{RPA}^+|\delta Q_{JM}^m$ a využitím QRPA podmienky (15) dostaneme:

$$\langle 0_{RPA}^+|[\delta Q_{JM}^m, H, Q_{JM}^{m\dagger}]|0_{RPA}^+\rangle = \Omega_m \langle 0_{RPA}^+|[\delta Q_{JM}^m, Q_{JM}^{m\dagger}]|0_{RPA}^+\rangle,$$

4. dosadením vyjadrenia (16) pre fonónový operátor do predchádzajúcej rovnosti a uvažovaním variácie amplitúd X_{pn}^m , Y_{pn}^m , získame QRPA rovnice:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^m \\ Y^m \end{pmatrix} = \Omega_m \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^m \\ Y^m \end{pmatrix}, \quad (18)$$

kde matice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}$ sú definované nasledovne:

$$\mathcal{A}(pn p' n' J) = \langle 0_{RPA}^+|[A(pn; JM), H, A^\dagger(p' n'; JM)]|0_{RPA}^+\rangle,$$

$$\mathcal{B}(pn p' n' J) = \langle 0_{RPA}^+|[A(pn; JM), H, \tilde{A}(p' n'; JM)]|0_{RPA}^+\rangle, \quad (19)$$

$$\mathcal{U}(pn p' n' J) = \langle 0_{RPA}^+|[A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)]|0_{RPA}^+\rangle.$$

Dvojitý komutátor použitý v zápisoch matíc má tvar $[A, B, C] = \frac{1}{2}[A, [B, C]] + \frac{1}{2}[[A, B], C]$. Riešením rovníc (18) sa získajú excitačné energie Ω_m a variačné amplitúdy X_{pn}^m , Y_{pn}^m , na základe ktorých vieme skonštruovať vlnovú funkciu m -tého vzbuđeného stavu jadra.

V rámci realistických výpočtov sa pri počítaní matíc (19) nezaobídeme bez priblížení, podľa ktorých rozlišujeme rôzne modifikácie QRPA metódy. **Štandardná QRPA metóda** používa tzv. *kvázibozónovú aproximáciu* (QBA). Jej podstata spočíva v tom, že komutátor dvoch bifermiónových operátorov $[A(pn; JM), A^\dagger(pn; JM)]$ sa nahrádza jeho strednou hodnotou v BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) vákuu [6, 7]:

$$\begin{aligned} [A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)] &\approx \langle BCS|[A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)]|BCS\rangle \\ &= \delta_{pp'} \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (20)$$

To má za následok, že operátory A , $A^\dagger$ sa správajú ako bozónové, čím je narušená platnosť Pauliho vylučovacieho princípu. Tento nedostatok čiasťtočne odstraňuje **renormalizovaná QRPA**, keď sa zamení neskorelované $|BCS\rangle$ vákuum za skorelované $|0_{RPA}^+\rangle$ vákuum (renormalizovaná QBA - RQBA) [6, 7]:

$$\begin{aligned} [A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)] &\approx \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle \\ &= \delta_{pp'} \delta_{nn'} D_{pn} \quad D_{pn} < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

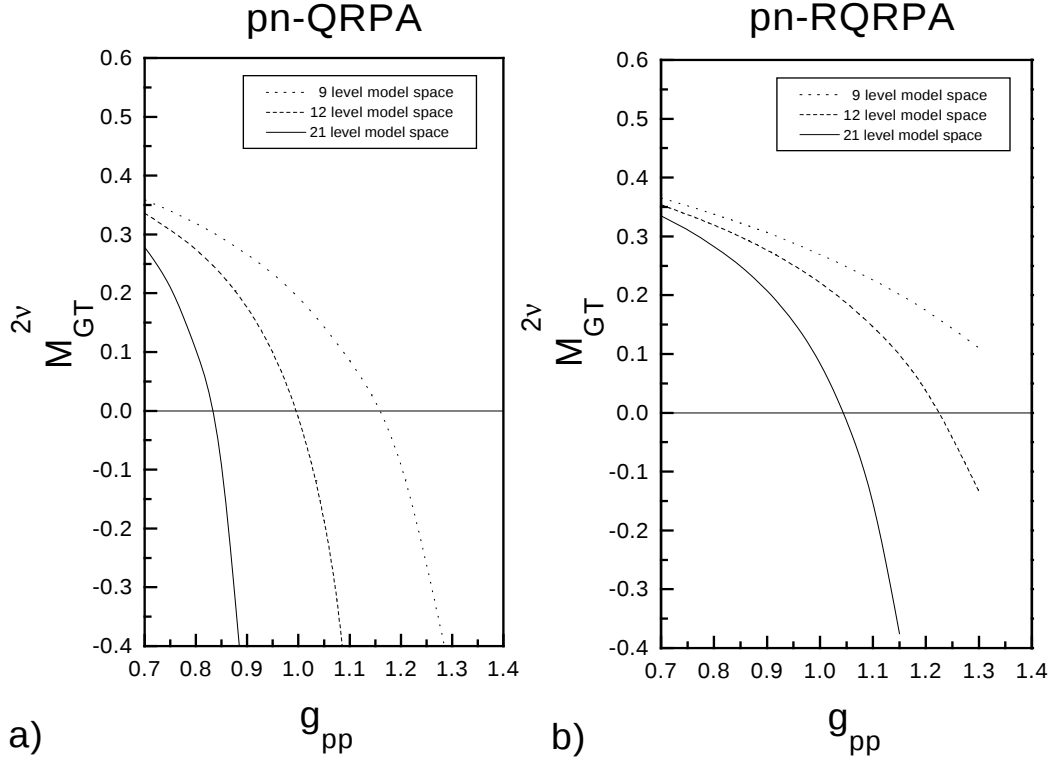
Renormalizačný faktor D_{pn} , ktorého hodnota je menšia ako 1 ($D_{pn} = 1$ zodpovedá QBA), spätne závisí od variačných amplitúd X^m , Y^m . Z vyššie uvedeného vyplýva, že RQRPA približným spôsobom spĺňa Pauliho vylučovací princípu. To však má za následok nezachovanie Ikedovho sumačného pravidla, ktoré bolo v QRPA exaktne splnené. V realistických výpočtoch sa sústava QRPA rovníc (18) spolu s podmienkou (21) rieši iteračne, čo kladie značné nároky na výkon použitej výpočtovej techniky.

V rámci QRPA a RQRPA výpočtov sa zavádzajú parametre g^{pp} a g^{ph} , ktorými sa renormalizujú časticovo-časticová a časticovo-dierová interakcia jadrového hamiltoniánu. Skutočná hodnota parametrov g^{pp} a g^{ph} by mala byť rovná 1. Ich odchýlky od danej hodnoty sú určené tým, že v rámci zvoleného modelového priestoru nemôžeme obsiahnuť celý Hilbertov priestor stavov. Parameter g^{ph} je zvyčajne fixovaný na základe experimentálnych údajov o polohe gigantickej Gamow-Tellerovej rezonancie alebo izobarického analógového stavu (IAS), zatiaľ čo g^{pp} je považovaný za voľný parameter pri určení maticových elementov $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Ich samotný výpočet pozostáva z dvoch rôznych QRPA (RQRPA) diagonalizácií, týkajúcich sa opisov β -prechodov z pôvodného (A,Z) do prechodového jadra (A,Z+1) a z prechodového (A,Z+1) do konečného jadra (A,Z+2). V rámci QRPA (RQRPA) generované vzбудené stavy prechodového jadra zo základných stavov pôvodného a konečného jadra ($|J_{m_i}^+\rangle$ a $|J_{m_f}^+\rangle$) nie sú identické v dôsledku použitých priblížení (tento jav sa označuje ako *dvojvákuový problém*). Daný problém sa rieši zavedením do maticového elementu (11), (12) faktora prekrytia uvedených stavov $\langle J_{m_i}^+ | J_{m_f}^+ \rangle$. Pre $M_{GT}^{2\nu}$ potom dostaneme [8]:

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_{m_f m_i} \langle 0_f^+ | \sum_n \tau_n^+ \vec{\sigma}_n | J_{m_f}^+ \rangle \langle J_{m_f}^+ | J_{m_i}^+ \rangle \langle J_{m_i}^+ | \sum_n \tau_n^+ \vec{\sigma}_n | 0_i^+ \rangle \frac{1}{E_m - E_i + \Delta}. \quad (22)$$

Dôsledky tohto priblíženia zatiaľ nie sú dostatočne známe a sú predmetom štúdií.

Na obrázkoch 2(a) a 2(b) je znázornená závislosť $M_{GT}^{2\nu}$ maticových elemen-



Obrázok 2: Gamow-Tellerov maticový element pre $2\nu\beta\beta$ -rozpad ^{76}Ge počítaný v rámci pn-QRPA (a) a pn-RQRPA (b) ako funkcia sily časticovo-časticovej interakcie g^{pp} [3]. Bodkovaná krivka odpovedá 9-úrovňovému modelovému priestoru, čiarkovaná 12-úrovňovému a plná čiara prislúcha výpočtom s 21 jednočasticovými úrovnami.

to od g^{pp} pre $2\nu\beta\beta$ -rozpad jadra ^{76}Ge , počítaná v pn-QRPA a pn-RQRPA² [3]. V prípade QRPA výpočtov $M_{GT}^{2\nu}$ extrémne citlivo závisí od parametra g^{pp} a v okolí fyzikálnej hodnoty $g^{pp} \approx 1$ prechádza nulou, čo výrazne znižuje predpovedaciu schopnosť metódy. Na dôvažok v uvedenej oblasti riešenie QRPA kolabuje, t.j. energia prvého vzbudeného stavu sa stáva imaginárnou, čo vylučuje použitie metódy pre väčšie hodnoty g^{pp} . Pre 9, 12 a 21 úrovňový modelový priestor sa kolaps QRPA riešenia vyskytuje pri kritických hodnotách $g^{pp} = 1.3, 1.1$ a 0.9 . Nestabilita $M_{GT}^{2\nu}$ a následný kolaps riešenia je spôsobený vytváraním príliš veľkého množstva korelácií základného stavu s rastúcim parametrom g^{pp} [4, 5]. Príčinou takéhoto správania je nezachovanie Pauliho vylučovacieho princípu (t.j. použitie QBA) v QRPA. Jeho čiastočným reš-

²pn-QRPA - neuvažuje p-n párovanie, full-QRPA - QRPA s p-n párovaním

taurovaním v rámci RQRPA (obr. 2 (b)) sa citlivosť $M_{GT}^{2\nu}$ na g^{pp} znižuje a kolaps riešenia sa posúva do vyšších, nefyzikálnych oblastí hodnôt parametra g^{pp} [7]. Pre realistické výpočty vo veľkých modelových priestoroch je však aj približné uvažovanie Pauliho princípu v RQRPA nedostatočné. Väčší počet úrovní znamená viac korelácií základného stavu a teda kolaps RQRPA riešenia už pre menšie hodnoty g^{pp} . Presnosť a hodnovernosť určovania maticových elementov tiež ovplyvňuje už spomenutý dvojvákuový problém.

2.3 Štúdie v rámci schematických modelov

Pri vývoji nových jadrovo-štruktúrnych metód sa bežne používajú schematické modely [9, 10, 11, 13, 22] (napríklad SU(2), O(5), SO(8) model). Výhodou takéhoto postupu je:

- existencia exaktného riešenia pre požadovanú veličinu $\Rightarrow$ možnosť porovnávania výsledkov z aproximačných metód s presnými hodnotami,
- veličiny počítané v schematickom modeli vykazujú rovnaké kvalitatívne správanie ako v realistickom prípade,
- jednoduchý hamiltonián so schematickou interakciou $\Rightarrow$ malé výpočtové nároky.

2.3.1 Protón-neutrónový Lipkinov model

Pre štúdium jednoduchých a dvojitých β -prechodov bol Kuzminom a Solovievom [15] navrhnutý model so separovateľnou interakciou, ktorý bol úspešne aplikovaný na rôzne jadrové systémy. Jeho ohraničením na priestor jednej vrstvy dostávame schematický O(5) model, ktorý sa ukázal veľmi užitočný pre štúdium rôznych charakteristík Fermiho beta-prechodov [16, 17, 18]. Zodpovedajúci Hamiltonián obsahuje jednočasticový člen, párovaciu interakciu pre protóny a neutróny, ako aj schematickú reziduálnu interakciu typu častica-častica (p - p) a častica-diera (p - h):

$$H = H_p + H_n + H_{res}, \quad (23)$$

kde

$$H_\tau = e_\tau \sum_m a_{\tau m}^\dagger a_{\tau m} - G_\tau S_\tau^\dagger S_\tau \quad (\tau = p, n), \quad (24)$$

$$H_{res} = 2\chi\beta^-\beta^+ - 2\kappa P^-P^+,$$

Operátory použité v (24) majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned}
S_\tau^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_m a_{\tau m}^\dagger \tilde{a}_{\tau m}^\dagger \quad (\tau - \tau \text{ párovanie}), \\
\beta^- &= \sum_m a_{pm}^\dagger a_{nm}, \quad \beta^+ = (\beta^-)^\dagger \quad (p - h \text{ párovanie}), \\
P^- &= \sum_m a_{pm}^\dagger \tilde{a}_{nm}^\dagger, \quad P^+ = (P^-)^\dagger \quad (p - p \text{ párovanie}).
\end{aligned} \tag{25}$$

$a^\dagger(a)$ je časticový kreačný (anihilačný) operátor, $\tilde{a}_{\tau m}^\dagger = (-1)^{j_\tau - m_\tau} a_{\tau - m_\tau}^\dagger$ je časovo reverzný časticový kreačný operátor. Parametre χ, κ reprezentujú renormalizačné faktory g^{ph}, g^{pp} p - h a p - p interakcie.

Z hľadiska QRPA výpočtov hamiltonián (23) veľmi dobre reprodukuje výsledky pre jednoduché a dvojité beta-prechody získané pomocou realistických modelov [20]. Aj v ohraničení jednovrstvového modelového priestoru sa dosahujú charakteristiky, ktoré majú rovnaké kvalitatívne črty ako tie, získané v realistických QRPA výpočtoch. Presnejšie, excitačné energie a amplitúdy β a $\beta\beta$ -prechodov závisia od parametra κ p - p interakcie rovnakým spôsobom ako v prípade jadrových modelov pozostávajúcich z mnohých jednočasticových úrovní a uvažujúce realistickú nukleón-nukleónovú interakciu.

Pre potreby QRPA štúdií je potrebné prepísať hamiltonián (23) do kvázičasticovej reprezentácie. Použitím Bogoliubovovej transformácie, spájajúcej operátory častíc ($a^\dagger, a$) a kvázičastíc ($\alpha^\dagger, \alpha$) [21]

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\tau m}^\dagger \\ \tilde{\alpha}_{\tau m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\tau & -v_\tau \\ v_\tau & u_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau m}^\dagger \\ \tilde{a}_{\tau m} \end{pmatrix} \quad (\tau = p, n), \tag{26}$$

a zanedbaním tzv. rozptylových členov $\alpha_p^\dagger \alpha_n$, $\alpha_n^\dagger \alpha_p$, pre hamiltonián (23) dostaneme,

$$H_F = \epsilon C + \lambda_1 A^\dagger A + \lambda_2 (A^\dagger A^\dagger + AA). \tag{27}$$

Uvedený kvázičasticový schematický hamiltonián (27) predstavuje rozšírený **protón-neutrónový Lipkinov model**. Jednotlivé bifermiónové operátory vystupujúce v (27) sú dané nasledovne:

$$C = \sum_m \alpha_{pm}^\dagger \alpha_{pm} + \alpha_{nm}^\dagger \alpha_{nm}, \quad A^\dagger = [\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger]^{J=0}. \tag{28}$$

Parametre λ_1 a λ_2 sú funkciami parametrov χ a κ pôvodného hamiltoniánu:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 4\Omega[\chi(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) - \kappa(u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2)], \\
\lambda_2 &= 4\Omega(\chi + \kappa)u_p v_n v_p u_n.
\end{aligned} \tag{29}$$

Zavedený jednovrstvový limit znamená rovnaké energie protónových a neutrónových kvázičastíc ($\epsilon_p = \epsilon_n = \epsilon$) a pre obsadzovacie amplitúdy u a v platí: $v_i = \sqrt{N_i/2\Omega}$, $u_i = \sqrt{1 - N_i/2\Omega}$ ($i = p, n$, N_i je počet protónov, resp. neutrónov). Ω určuje degeneráciu uvažovanej j -vrstvy ($2\Omega = 2j + 1$).

Dôležitým aspektom daného modelu je, že operátory $\{A^\dagger, A, C\}$ spĺňajú SU(2) algebru:

$$[A, A^\dagger] = 1 - \frac{C}{2\Omega}, \quad [C, A^\dagger] = 2A^\dagger, \quad [A, C] = 2A. \quad (30)$$

Exaktné riešenia pre protón-neutrónový Lipkinov model sa získajú diagonalizáciou H_F v priestore stavov

$$|n\rangle = \mathcal{N}(A^\dagger)^n|0\rangle, \quad 0 \leq n \leq 2\Omega, \quad (31)$$

kde $\mathcal{N}$ je norma a $|0\rangle$ predstavuje vákuum pre operátory $A^\dagger, A$.

2.3.2 QRPA a Pauliho vylučovací princíp

V práci [13] bolo nájdené QRPA riešenie v rámci protón-neutrónového Lipkinovho modelu (27), ktoré spĺňa exaktne Pauliho vylučovací princíp.

V uvedenom modeli pre fonónový kreačný operátor môžeme napísať

$$Q^\dagger = XA^\dagger - YA \quad (32)$$

a QRPA problém sa redukuje na riešenie sústavy dvoch rovníc

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = E_{RPA} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (33)$$

kde

$$\mathcal{A} = \langle RPA|[A, H_F, A^\dagger]|RPA\rangle, \quad \mathcal{B} = -\langle RPA|[A, H_F, A]|RPA\rangle, \quad (34)$$

$$\mathcal{U} = \langle RPA|[A, A^\dagger]|RPA\rangle.$$

Energiu vzbuđeného stavu E_{RPA} ako aj variačné amplitúdy X a Y je možné vyjadriť analyticky pomocou elementov $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$:

$$E_{RPA} = (\bar{\mathcal{A}}^2 - \bar{\mathcal{B}}^2)^{1/2}, \quad (35)$$

$$\bar{X} = \frac{\bar{\mathcal{A}} + E_{RPA}}{\sqrt{(\bar{\mathcal{A}} + E_{RPA})^2 - \bar{\mathcal{B}}^2}}, \quad (36)$$

$$\bar{Y} = \frac{-\bar{\mathcal{B}}}{\sqrt{(\bar{\mathcal{A}} + E_{RPA})^2 - \bar{\mathcal{B}}^2}}.$$

V rovniciach (35) a (36) sú použité označenia:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \mathcal{U}^{1/2} X, & \bar{Y} &= \mathcal{U}^{1/2} Y, \\ \bar{\mathcal{A}} &= \mathcal{U}^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{U}^{-1/2}, & \bar{\mathcal{B}} &= \mathcal{U}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{U}^{-1/2}.\end{aligned}\tag{37}$$

V rámci štandardnej QRPA (RQRPA) metódy sa určujú matice $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}$ približne, s využitím QBA (RQBA). Po aplikácii QBA dostaneme

$$\mathcal{A} = 2\epsilon + \lambda_1, \quad \mathcal{B} = 2\lambda_2, \quad \mathcal{U} = 1,\tag{38}$$

a v prípade RQBA sa štruktúra daných výrazov skomplikuje:

$$\mathcal{A} = 2\epsilon D + \lambda_1 D^2, \quad \mathcal{B} = 2\lambda_2 D^2, \quad \mathcal{U} = D = \left(1 + \frac{\bar{Y}^2}{\Omega}\right)^{-1}.\tag{39}$$

V uvažovanom modeli je možné presné určenie QRPA matíc, vychádzajúc z fermiónovej štruktúry $A^\dagger, A, C$ operátorov. Napríklad pre element $\mathcal{U}$ máme

$$\mathcal{U} = 1 - \frac{\langle RPA | C | RPA \rangle}{2\Omega}.\tag{40}$$

Na výpočet $\mathcal{U}$ potrebujeme poznať základný stav $|RPA\rangle$, ktorý je riešením rovnice $Q|RPA\rangle = 0$. Ukazuje sa, že už približné riešenie danej rovnice za predpokladu $[A, A^\dagger] = 1$

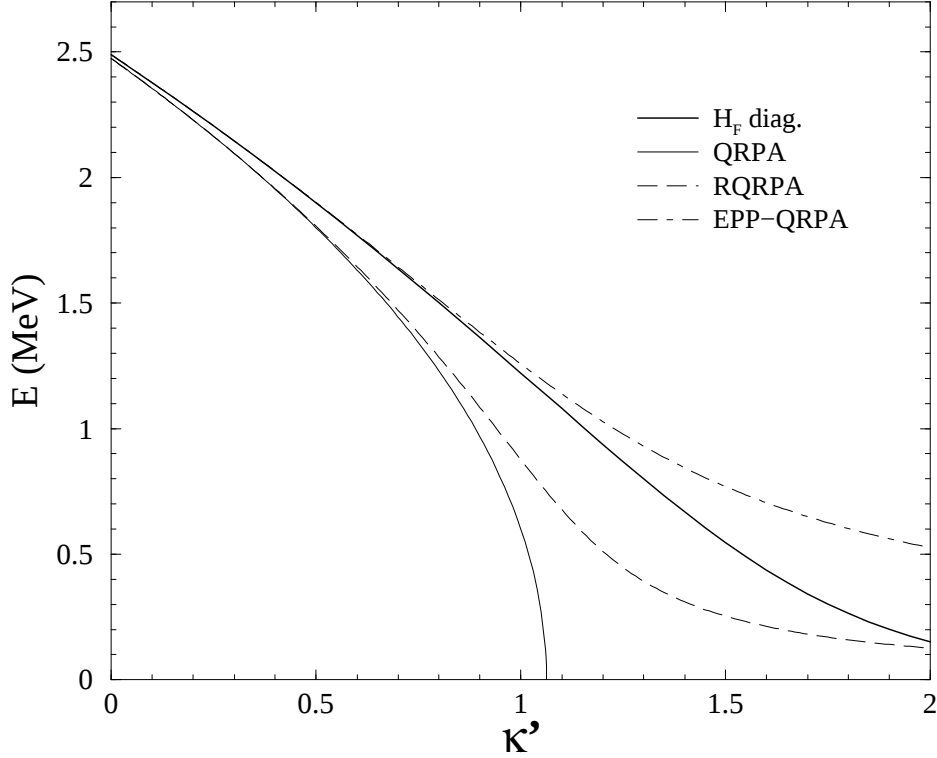
$$|RPA\rangle = N e^{-d A^\dagger A}, \quad d = -\frac{Y}{2X},\tag{41}$$

vedie na dobrý súhlas QRPA výpočtov s exaktnými. Pre daný model je však možné nájsť aj exaktné riešenie rovnice $Q|RPA\rangle = 0$, t.j. presné vyjadrenie základného stavu $|RPA\rangle$ [13] a bez priblížení určiť potrebné maticové elementy. Riešenia s exaktným Pauliho princípom (EPP-QRPA) boli zatiaľ nájdené len v rámci Lipkinovho modelu. Ich porovnanie s metódami narušujúcimi Pauliho vylučovací princíp umožňuje robiť závery ohľadom kvality použitých priblížení.

Na obrázku 3 sú prezentované vypočítané energie prvého vzbuđeného stavu vzhľadom k základnému stavu v rámci rôznych variantov QRPA metódy ako funkcie p - p interakcie κ' . Redefinované parametre p - p a p - h interakcie κ' a χ' súvisia s pôvodnými nasledovne:

$$\chi' = 2\Omega\chi, \quad \kappa' = 2\Omega\kappa.\tag{42}$$

Pre porovnanie je v grafe 3 uvedená aj zodpovedajúca hodnota energie získaná diagonalizáciou H_F . Všimnime si, že riešenie štandardnej QRPA



Obrázok 3: Porovnanie energie prvého vzbuđeného stavu získaného diagonalizáciou H_F (H_F diag.) s hodnotami počítanými štandardnou QRPA (QRPA), renormalizovanou QRPA (RQRPA) a QRPA s exaktným uvažovaním Pauliho princípu (EPP-QRPA). Parametre použitého modelu sú: $\epsilon = 1\text{MeV}$, $j = 9/2$, $N = 6$, $Z = 4$, $\chi' = 0.5\text{MeV}$.

pri istej hodnote κ' kolabuje. Ostatné energie sú nájdené na celom intervale hodnôt κ' , čo ukazuje na dôležitosť Pauliho princípu pri opise mnohonukleónovej sústavy.

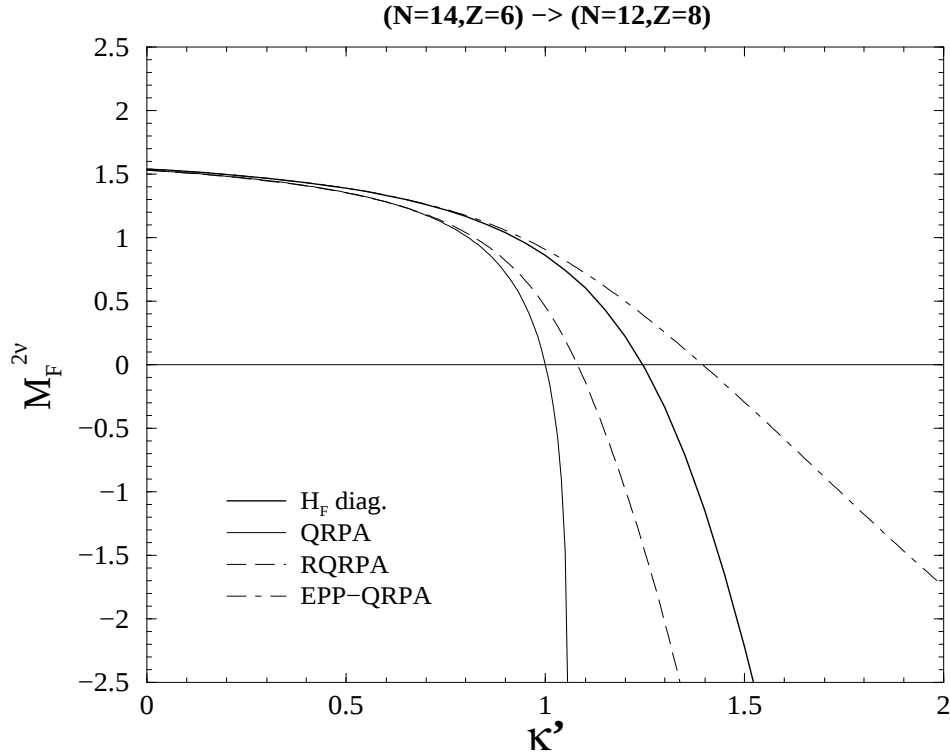
Jednoduché a dvojité beta-prechody. Fermiho $\beta^\pm$ operátory [viď definície (25)] majú v reprezentácii operátorov $A^\dagger, A$ tvar

$$\beta^- = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n A^\dagger + v_p u_n A), \quad \beta^+ = (\beta^-)^\dagger. \quad (43)$$

V rámci uvažovaného modelu je len jeden QRPA vzbuđený stav. Preto pre $2\nu\beta\beta$ -maticový element platí:

$$M_F^{2\nu} = \frac{f \langle RPA | \beta^- | 0_1^+ \rangle_{fi} \langle 0_1^+ | \beta^- | RPA \rangle_i}{E_{RPA} + \Delta}. \quad (44)$$

Stavy s indexami i a f prislúchajú počiatočnému (A, Z) a konečnému $(A, Z+2)$ jadru. Vypočítané hodnoty $M_F^{2\nu}$ v závislosti na κ' sú zobrazené na grafe 4. Priebeh QRPA a RQRPA krivky je kvalitatívne zhodný s priebehom nájdeným v realistických výpočtoch. Stojí za všimnutie, že v porovnaní s týmito výsledkami, hodnoty $M_F^{2\nu}$ získané v rámci EPP-QRPA, sú podstatne menej citlivé k meniacemu sa parametru κ' . Pozoruhodné je, že exaktné riešenie v okolí $\kappa' = 1.25 \text{ MeV}$ prechádza nulou, t.j. hodnoty maticového elementu $M_F^{2\nu}$ sú v tejto oblasti silne potlačené.



Obrázok 4: Fermiho maticový element $2\nu\beta\beta$ -rozpadu ako funkcia parametra p - p interakcie κ' . Výpočet bol uskutočnený pre jadrový prechod $(N = 14, Z = 6) \rightarrow (N = 12, Z = 8)$ a hodnoty parametrov: $\epsilon = 1 \text{ MeV}$, $j = 19/2$, $\chi' = 0.5 \text{ MeV}$, $\Delta = 0.5 \text{ MeV}$. Označenie jednotlivých riešení je rovnaké ako v obrázku 3.

2.3.3 Semiklasický opis excitácie mnohonukleónového systému

V tejto časti stručne uvedieme metódu, v rámci ktorej mnohonukleónový systém je opísaný klasickými rovnicami pohybu, ktoré vyplývajú z variačného princípu [11]:

$$\delta \int_0^t \langle \psi | H - i \frac{\partial}{\partial t'} | \psi \rangle dt' = 0. \quad (45)$$

Uvažujeme schematický protón-neutrónový Lipkinov hamiltonián (27) a dva nasledovné variačné stavy spolu s predpokladom, týkajúceho sa komutátorov zodpovedajúcich operátorov:

$$\text{Stav 1: } |\psi_1(z, z^*)\rangle = \exp\{zA^\dagger - z^*A\}|0\rangle, \quad (46)$$

kde $[A, A^\dagger] = 1$, $[C, A^\dagger] = 2A^\dagger$, $[A, C] = 2A$.

$$\text{Stav 2: } |\psi_2(z, z^*)\rangle = \exp\{zA^\dagger - z^*A\}|0\rangle, \quad (47)$$

kde $[A, A^\dagger] = 1 - C/2\Omega$, $[C, A^\dagger] = 2A^\dagger$, $[A, C] = 2A$. V uvedených definíciách $|0\rangle$ označuje vákuum pre kvázičasticové operátory a z je komplexná funkcia času ($z = \rho e^{i\phi}$).

Analyzujeme najskôr prípad prvého ansatzu $|\psi_1\rangle$. Ak položíme $z = x + iy$ ($z^* = x - iy$) a definujeme nové kánonické premenné

$$\xi = \sqrt{2}x, \quad \eta = \sqrt{2}y, \quad (48)$$

dostaneme z variačného princípu (45) Hamiltonove pohybové rovnice:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\dot{\eta}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \dot{\xi}. \quad (49)$$

Stredná hodnota $\mathcal{H}$ hamiltoniánu (27) v stave $|\psi_1(z, z^*)\rangle$ má tvar

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(2\epsilon + \lambda_1)(\xi^2 + \eta^2) + \lambda_2(\xi^2 - \eta^2). \quad (50)$$

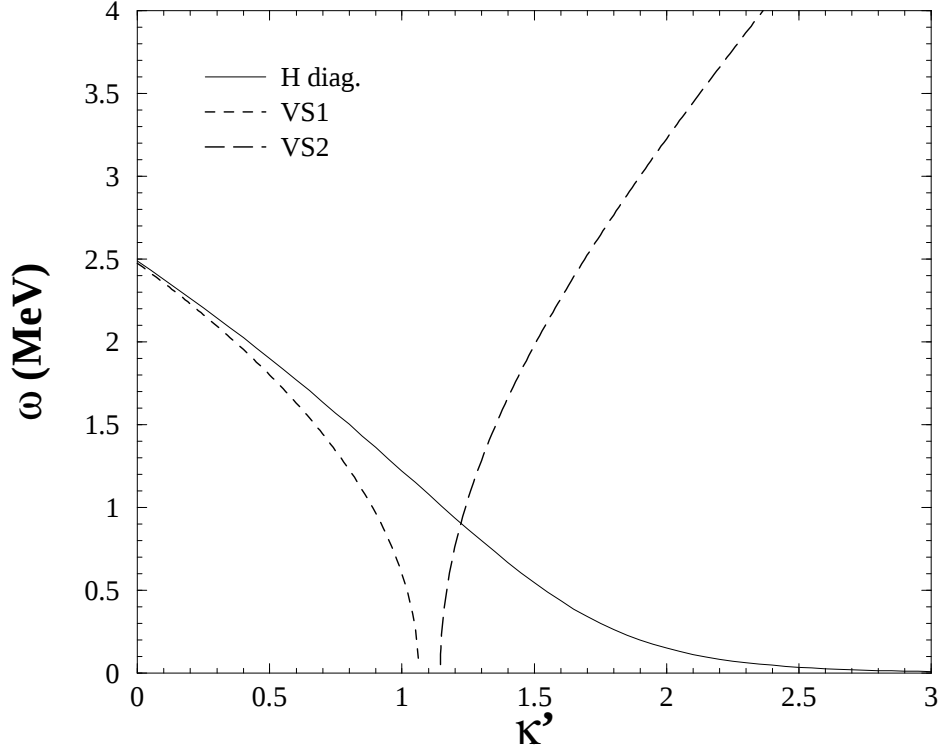
Eliminovaním η zo systému (49) dostaneme rovnicu pre ξ :

$$\ddot{\xi} + (2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2)(2\epsilon + \lambda_1 + \lambda_2)\xi = 0, \quad (51)$$

ktorej riešenie opisuje harmonický pohyb s frekvenciou

$$\omega = \sqrt{(2\epsilon + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2^2}. \quad (52)$$

Tento výraz je identický s energiou E_{RPA} , počítanou štandardnou QRPA metódou.



Obrázok 5: Harmonické frekvencie ako funkcie parametra κ' . *VS1* je riešenie s variačným stavom (46) a *VS2* s použitím ansatzu (47). Pre porovnanie je uvedená aj excitačná energia $E_1 - E_0$ získaná diagonalizáciou hamiltoniánu (27) (*H diag.*).

V ďalšom kroku uvažujme druhý ansatz (47), t.j. presné komutačné vzťahy (30). Pre strednú hodnotu hamiltoniánu (27) a klasický účinok vo variačnom stave (47) platí:

$$\mathcal{H} = \langle \psi_2 | H | \psi_2 \rangle = 4\epsilon\Omega |V|^2 + \lambda_1(2\Omega U^2 |V|^2 + |V|^4) + \lambda_2(2\Omega - 1)U^2(V^2 + V^{*2}),$$

$$\langle \psi_2 | i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_2 \rangle = -2\Omega(\sin \rho)^2 \dot{\phi}, \quad (53)$$

kde $U = \cos \rho$, $V = e^{-i\phi} \sin \rho$. Zmenou kánonických premenných (z, z^*) na (r, ϕ) , kde $r = 2\Omega(\sin \rho)^2$, dostaneme z variačného princípu (45) Hamiltonove rovnice

$$-\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}. \quad (54)$$

Stredná hodnota $\mathcal{H}$ v uvažovanom variačnom stave, vyjadrená cez premenné (r, ϕ) , je daná nasledovne:

$$\mathcal{H} = 2\epsilon r + \lambda_1 \left[r \left(1 - \frac{r}{2\Omega} \right) + \frac{r^2}{4\Omega^2} \right] + 2\lambda_2 \frac{2\Omega - 1}{2\Omega} r \left(1 - \frac{r}{2\Omega} \right) \cos(2\phi). \quad (55)$$

Rovnice (54) nie sú lineárne. Ich linearizáciou dostávame riešenie zodpovedajúce harmonickým kolektívnym vibráciám mnohonukleónovej sústavy. Situácia je teraz odlišná od predošlého prípadu, keď $\mathcal{H}$ nadobúdalo svoje minimum v počiatku kánonických súradníc. V danom prípade nachádzame minimum $\mathcal{H}$ pre nasledujúce hodnoty:

$$r^\circ = \frac{2\Omega^2}{2\Omega - 1} \cdot \frac{2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}}{\lambda_1 - 2\lambda_2}, \quad \phi^\circ = \frac{\pi}{2}. \quad (56)$$

Táto zmena znamená novú fázu pre jadrový mnohočasticový systém. Linearizácia pohybových rovníc (54) v okolí minima potenciálnej energie $\mathcal{H}(r^\circ, \phi^\circ)$ vedie na harmonické riešenia charakterizované frekvenciou

$$\omega = \left[\frac{4\lambda_2}{\lambda_1 - 2\lambda_2} (2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}) (2\epsilon - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega}) \right]^{1/2}. \quad (57)$$

Vypočítané harmonické frekvencie (52),(57) ako funkcie p - p interakcie κ' sú nakreslené na obrázku 5. Použité modelové parametre sú: $j = 9/2$, $\chi' = 0.5 MeV$, $\epsilon = 1 MeV$, $N_p = 4$ a $N_n = 6$. Prvý mód s nulovou minimálnou energiou základného stavu existuje v intervale $\kappa' \in (0, 1.06) MeV$. Druhý mód v novej fáze jadrového systému bol nájdený pre hodnoty $\kappa' \in (1.15, 3) MeV$.

3 Ciele práce

V súčasnosti zriedkavé jadrové procesy, akými sú napríklad bezneutrínový dvojitý beta-rozpad a procesy mión-pozitrónovej/elektrónovej konverzie jadier, hrajú dôležitú úlohu pri hľadaní novej fyziky za štandardným modelom, ako aj pri vývoji teórií veľkého zjednotenia silných, slabých a elektromagnetických interakcií a ich supersymetrických verzií. Štúdium bezneutrínového dvojitého beta-rozpadu umožňuje spolu s informáciou o experimentálnom dolnom ohrazení zodpovedajúceho polčasu rozpadu podstatne zmenšiť možný priestor rozličných parametrov nezachovania leptonového náboja, ktoré sú predmetom záujmu fyziky elementárnych častíc. Spoľahlivosť takto určených hodnôt týchto parametrov závisí od nepresnosti určenia zodpovedajúcich jadrových maticových elementov. Pri súčasnom realistickom opise jadrových premien sa nezaobídeme bez priblížení, ktorých dôsledky nie sú celkom známe a sú predmetom intenzívnych teoretických štúdií. Cieľom dizertačnej práce je štúdium rôznych mnohonukleónových priblížení používaných pri súčasnom realistickom opise β - a $\beta\beta$ - jadrových prechodov, ako aj vývoj nových, dokonalejších metód pre opis mnohonukleónových systémov, ktoré by mohli byť aplikované na oblasť stredne ťažkých a ťažkých jadier.

Ciele práce môžeme rozdeliť na nasledujúce úlohy:

1. Zlepšenie opisu základného stavu jadra v rámci QRPA metódy, a to jeho optimalizáciou pomocou variačného princípu. Variačné určenie QRPA základného stavu pri súčasnej diagonalizácii QRPA rovníc predstavuje nový, originálny prístup k opisu mnohonukleónových systémov. Predpokladá sa uskutočniť schematický výpočet v rámci protón-neutrónového Lipkinovho modelu s cieľom nájsť nové riešenia-fázy v oblasti za kritickou hodnotou parametra časticovo-časticovej interakcie (určenou kolapsom štandardnej QRPA), ktoré boli nájdené zatiaľ len v rámci semiklasických výpočtov.
2. Výpočet maticových elementov dvojneutrínového dvojitého beta-rozpadu v rámci schematických modelov s využitím ich integrálnej reprezentácie (8), t.j. bez určenia úplnej sústavy vzbudných stavov prechodového jadra. Ide o neštandardný prístup z hľadiska súčasných výpočtov, ktoré sumujú príspevky od stavov prechodového jadra, generovaných v rámci QRPA metódy alebo vrstvého modelu. Navrhnutý postup umožňuje vyhnúť sa tzv. dvojvákuovému problému pri QRPA výpočte $\beta\beta$ -prechodov, ktorý v dôsledku nezachovania počtu častíc v rámci QRPA môže značne ovplyvniť výsledok.

3. Aplikácia PP-QRPA metódy (QRPA with Pauli Exclusion Principle) navrhnuť v práci [13] pre prípad realistických $2\nu\beta\beta$ -výpočtov v modeloch so separovateľnou reziduálnou interakciou. Prednosťou danej metódy v porovnaní so štandardnou QRPA, RQPRA je presnejší výpočet QRPA maticových elementov, využijúc fermiónovú reprezentáciu jadrového Hamiltoniánu. Predmetom štúdie budú β - a $\beta\beta$ -prechody vybraných jadrových systémov. Plánuje sa porovnanie výsledkov získaných pomocou uvedených metód ako aj analýza ich citlivosti k renormalizácii časticovo-časticovej interakcie jadrového hamiltoniánu. Tým sa získa ďalšia dôležitá informácia o úlohe Pauliho vylučovacieho princípu pri opise mnohonukleónových sústav.

4 Projekt práce, dosiahnuté výsledky

4.1 QRPA s optimálnym základným stavom

Zo štúdií [10, 11] vyplýva, že nestabilita a kolaps QRPA riešenia pri kritickej hodnote p - p interakcie (κ'_c) súvisí so zmenou v štruktúre základného stavu jadra. Reorganizácia nukleónov v okolí κ'_c je indikátorom fázového prechodu v prípade harmonických kolektívnych excitácií mnohonukleónového systému. Na mieste je otázka existencie a hľadania riešenia pre $\kappa' > \kappa'_c$ v rámci QRPA v prípade zmeneného základného stavu, t.j. QRPA vákuua. To ale vyžaduje zmeniť principiálne ansatz pre vlnovú funkciu základného stavu $|RPA\rangle$, keďže samotné splnenie podmienky $Q|RPA\rangle = 0$ nezaručuje správny opis energie základného stavu v rámci QRPA pre $\kappa \geq \kappa'_c$. V danej práci chceme ukázať, že je možné riešiť načrtnutý problém použitím originálneho ansatzu, ktorý dovoľí optimalizovať variačným spôsobom QRPA základný stav. Ukazuje sa, že tento problém je riešiteľný v rámci schematickeho protón-neutrónového Lipkinovho modelu, jeho formulovaním v bozónovej reprezentácii.

Použitím Marumoriho procedúry [22] na mapovanie fermiónových operátorov do bozónového priestoru, dostaneme pre hamiltonián (27) jeho bozónový obraz:

$$H_B = \alpha_{11}B^\dagger B + \alpha_{02}(B^\dagger B^\dagger + BB) + \alpha_{22}B^\dagger B^\dagger BB + \alpha_{13}(B^\dagger BBB + B^\dagger B^\dagger B^\dagger B), \quad (58)$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (2\epsilon + \lambda_1), \quad \alpha_{02} = \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}}, \quad \alpha_{22} = -\frac{\lambda_1}{2\Omega} \\ \alpha_{13} &= \lambda_2 \left[\sqrt{(1 - \frac{1}{2\Omega})(1 - \frac{1}{\Omega})} - \sqrt{(1 - \frac{1}{2\Omega})} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Pri mapovaní sme v (58) zanedbali členy obsahujúce šesť a viac bozónových operátorov. Operátory B a $B^\dagger$ spĺňajú nasledovný komutačný vzťah: $[B, B^\dagger] = 1$ ($B^\dagger$ je kreačný bozónový operátor, B -komplexne združený k $B^\dagger$).

V QRPA výpočtoch zavedieme originálny ansatz, ktorý umožní súčasne minimalizovať energiu základného stavu a splniť QRPA podmienku $Q|RPA\rangle = 0$:

$$|RPA\rangle = e^{t^* B - t B^\dagger} e^{z B^\dagger B^\dagger - z^* B B} | \rangle. \quad (60)$$

$| \rangle$ predstavuje vákuum pre bozónové operátory, t, z sú komplexné parametre: $t = r e^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\phi}$. Nový faktor v danom ansatze, obsahujúci t, t^* parametre sa zavádza, aby bolo možné optimalizovať QRPA základný stav. Limitný

prípád $t = 0$, $t^* = 0$ vedie na dosiaľ používaný ansatz v QRPA výpočtoch. Základný stav (60) predstavuje vákuum pre fonónový operátor, t.j. $Q|RPA\rangle = 0$. Táto podmienka je splnená ak $Q^\dagger$ zvolíme nasledovne

$$Q^\dagger = X(B^\dagger + t^*) - Y(B + t), \quad Q = (Q^\dagger)^\dagger, \quad (61)$$

a súčasne platí

$$e^{i\Phi} \sinh(2\rho) - \frac{Y}{X} \cosh(2\rho) = 0. \quad (62)$$

Systém QRPA rovníc je identický s (33). Matice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}$ dostaneme z rovníc (34) zámenou $(A, A^\dagger, H_F) \rightarrow (B, B^\dagger, H_B)$. Dodatočné stupne voľnosti (t, t^*) , resp. (r, θ) určíme z požiadavky minima energie základného stavu, t.j. základný stav (60) bude určený variačne. Máme:

$$\begin{aligned} H(r, \theta) &= \langle RPA | H_B | RPA \rangle = C_0 + C_2 r^2 + C_4 r^4, \\ C_0 &= \alpha_{11} v^2 + 2\alpha_{02} uv \cos \phi + \alpha_{22} [u^2 v^2 + 2v^4] + 6\alpha_{13} uv^3 \cos \phi, \\ C_2 &= \alpha_{11} + 2\alpha_{02} \cos(2\theta) + \alpha_{22} [4v^2 + 2uv \cos(2\theta + \phi)] + \\ &\quad 6\alpha_{13} [uv \cos \phi + v^2 \cos(2\theta)], \\ C_4 &= \alpha_{22} + 2\alpha_{13} \cos(2\theta), \quad u = \cosh(2\rho), \quad v = \sinh(2\rho). \end{aligned} \quad (63)$$

$H(r, \theta)$ nadobúda minimum pre:

a) $r = 0$, θ – ľubovoľné, **b)** $r = \sqrt{-C_2/(2C_4)}$, $\theta = 0$,
c) $r = \sqrt{-C_2/(2C_4)}$, $\theta = n\pi/2$, **d)** $r = \sqrt{-C_2/(2C_4)}$, $\theta \neq n\pi/2$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.
Prípád d) by viedol ku komplexným energiám a preto ho vylúčime. Riešenia b), c), d) sú špecifické pre nový QRPA ansatz. Na určenie energií E_{RPA} a amplitúd X , Y je potrebné súčasne splniť rovnice (33), (62) a niektorú z podmienok a), b), c). Obyčajne sa nelineárny QRPA problém rieši pomocou iteračného algoritmu, ktorý však negarantuje nájdenie všetkých riešení. V našom prípade využijeme prednosti daného schematickeho modelu a riešime sústavu rovníc úplne, čo umožňuje nájsť všetky QRPA riešenia, aj tie, ktoré by iteračným algoritmom mohli byť vynechané.

Konkrétne výpočty sme previedli pre systém s $N = 6$, $Z = 4$, $j = 9/2$, $\epsilon = 1 \text{ MeV}$ a $\chi' = 0.5 \text{ MeV}$. Kritická hodnota p - p interakcie je v tomto prípade $\kappa'_c = 1.06 \text{ MeV}$. V tabuľke 1 sú prezentované QRPA energie a energie základného stavu pre $\kappa' = 0.5$, 1.5 a 2.5 MeV . Vidíme, že v oblasti $\kappa' < \kappa'_c$ existujú len riešenia typu a). Za fázovým prechodom ($\kappa' > \kappa'_c$) sa ale objavili nové kolektívne módy typu c). Riešenie a1) s malou QRPA energiou a veľmi veľkou $E_{g.s.}$, ktoré sa ďalej transformuje v c1) riešenie, nebolo doposiaľ nájdené v QRPA výpočtoch. Je to preto, lebo boli použité iteračné algoritmy.

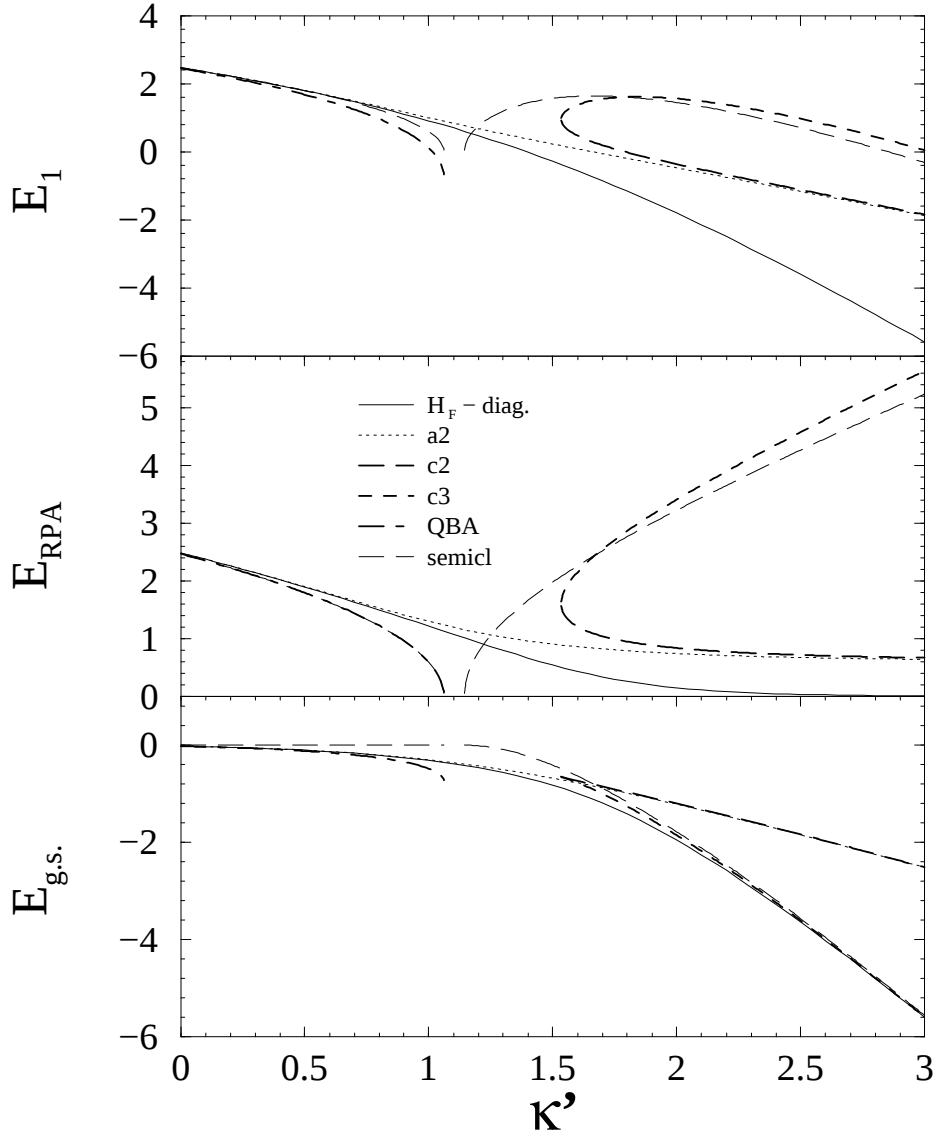
Tabuľka 1: *Energie základného stavu ($E_{g.s.}$) a QRPA energie (E_{RPA}) počítané pre hodnoty $\kappa' = 0.5, 1.5$ a 2.5 MeV, $\chi' = 0.5$ MeV a $j = 9/2$. Uvedené sú aj parametre určujúce QRPA vlnovú funkciu (60) a energiu základného stavu. $E_{g.s.}^{exact}$ sú energie získané diagonalizáciou H_F .*

Typ	ρ	ϕ	r^2	2θ	C_0	C_2	C_4	$E_{g.s.}$ [MeV]	E_{RPA} [MeV]
$\kappa' = 0.5$ MeV, $E_{g.s.}^{exact} = -0.104$ MeV									
a1	0.757	0	0	-	7.001	0.002	-0.100	7.001	0.046
a2	0.114	π	0	-	-0.104	3.004	-0.100	-0.104	1.906
$\kappa' = 1.5$ MeV, $E_{g.s.}^{exact} = -0.823$ MeV									
a2	0.308	π	0	-	-0.679	3.120	-0.100	-0.679	0.908
c1	0.755	0	0.438	π	7.004	-0.249	0.284	6.950	0.024
$\kappa' = 2.5$ MeV, $E_{g.s.}^{exact} = -3.638$ MeV									
a2	0.400	π	0	-	-1.841	3.344	-0.100	-1.841	0.675
c1	0.780	π	1.326	π	6.834	-1.264	0.476	5.996	0.112
c2	0.384	0	0.081	π	-1.832	-0.077	0.476	-1.835	0.719
c3	0.041	π	2.838	π	0.230	-2.705	0.476	-3.609	4.580

Riešenie a2) odpovedá riešeniu EPP-QRPA, ktoré bolo opísané v kapitole o schematických výpočtoch.

Na obrázku 6 sú uvedené závislosti energie základného stavu ($E_{g.s.}$), prvého vzbudeného stavu (E_1) a excitačnej energie ($E_{RPA} = E_1 - E_{g.s.}$) od κ' v prípade štandardnej QRPA, QRPA s optimálnym základným stavom a H_F diagonalizácie. Prezentované sú len riešenia s malou $E_{g.s.}$. Pre porovnanie sú do grafov 6 pridané energie vypočítané v rámci semiklasickej metódy [11]. Postup pri ich výpočte bol naznačený v kapitole 2.3.3. Z obrázku 6 vyplýva, že nové fázy mnohonukleónovej sústavy typu c) vznikajú v rovnakom bode $\kappa' = 1.53$ MeV. Stojí za všimnutie, že energie c2) riešení sa asymptoticky blížia k a2) hodnotám. Riešenie c3) veľmi dobre reprodukuje základný stav získaný diagonalizáciou H_F , čo však neplatí v prípade E_{RPA} energie. Pozoruhodná je ale zhoda semiklasického a c3) riešenia pri všetkých troch uvažovaných energiách. Tým sa potvrdzuje regulárnosť daného riešenia a fakt, že predošlý rozdiel medzi semiklasickým a QRPA riešením mal pôvod v rozdielnom opise základného stavu mnohonukleónovej sústavy.

Je zaujímavé uviesť, že nové riešenia typu c) vznikajú len v dôsledku vyšších členov (úmerných koeficientom α_{22} , α_{13}) v bozónovom Hamiltoniáne. V limite $\Omega \rightarrow \infty$ (QBA priblíženie) sa daný hamiltonián mení na kvadratický



Obrázok 6: Energia základného stavu ($E_{g.s.}$), prvého vzbuđeného stavu (E_1) a excitačná energia (E_{RPA}) ako funkcia parametra p - p interakcie κ' . H_F diag. sú hodnoty získané diagonalizáciou hamiltoniánu (27), **a2),c2),c3)** sú riešenia QRPA s optimálnym základným stavom (viď text), **QBA** energie sú výsledkom štandardnej QRPA. Pre porovnanie je uvedené semiklasické riešenie (**semicl.**), ktoré bolo nájdené v [11].

hamiltonián

$$H_B^{(QBA)} = \alpha_{11} B^\dagger B + \alpha_{02} (B^\dagger B^\dagger + BB), \quad \alpha_{11} = 2\epsilon + \lambda_1, \quad \alpha_{02} = \lambda_2, \quad (64)$$

používaný vo výpočtoch v rámci štandardnej QRPA metódy. V danom prípade vzniká len jedno riešenie typu a) s kolapsom pre $\kappa' = \kappa'_c$.

Vlnové funkcie získané pomocou metódy QRPA s optimálnym základným stavom sa použili na výpočet $2\nu\beta\beta$ Fermiho maticového elementu. V bozónovom priestore platí pre $M_F^{2\nu}$ vzťah (44), v ktorom základný stav $|RPA\rangle$ je daný rovnicou (60). $\beta^\pm$ prechodové operátory sú v bozónovej reprezentácii dané nasledovne

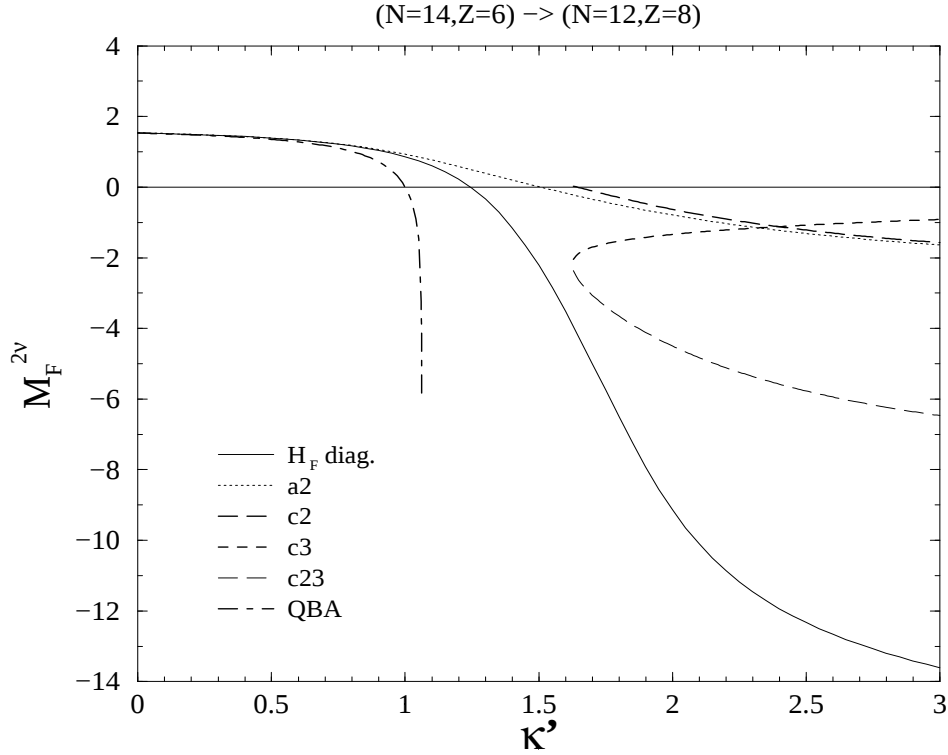
$$\beta^- = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n B^\dagger + v_p u_n B), \quad \beta^+ = (\beta^-)^\dagger. \quad (65)$$

Vyššie členy v bozónovom rozvoji daného operátora sa ukázali byť zanedbateľnými pri riešení danej úlohy. Pre výpočet maticového elementu $M_F^{2\nu}$ bol použitý model, ktorý sme uviedli v kapitole o schematických výpočtoch (viď komentár k obrázku 4). Hodnoty $M_F^{2\nu}$ odpovedajúce riešeniam a), c) sú zobrazené na grafe 7 spolu s maticovými elementami získanými pomocou štandardnej QRPA a H_F diagonalizácie. V snahe čo najlepšie opísať exaktný priebeh $M_F^{2\nu}$, vytvorili sme maticový element c23) ako kombináciu jednoduchých β -prechodov typu c2) a c3).

Nové riešenie c23) za fázovým prechodom ($\kappa' > \kappa'_c$) predstavuje dosiaľ najlepší opis exaktného riešenia pre veľké hodnoty κ' . Rozdiel medzi spomenutými výsledkami je však značný. Treba poznamenať, že QRPA s optimálnym základným stavom reprezentuje jeden z mála úspešných pokusov v hľadaní kolektívnych módo v oblasti veľkých hodnôt p - p interakcie.

Ďalší postup výpočtov v rámci daného projektu sa plánuje nasledovne:

1. Použitím QRPA vlnových funkcií zodpovedajúcich rôznym typom riešení nájdených v rámci danej metódy, uskutočniť výpočty nasledujúcich charakteristík: prekrytie exaktných vlnových funkcií s vypočítanými, stredné hodnoty počtu častíc základného a vzбудeného jadra, amplitúdy jednoduchých beta prechodov, previerka Ikedovho sumačného pravidla. ...
2. Sumarizácia dosiahnutých výsledkov, príprava publikácie.
3. Skúmanie možnosti aplikácie QRPA metódy s optimálnym základným stavom pre prípad zložitejších schematických modelov, napr. O(5) modelu [18], alebo jej aplikácie na realistické výpočty β - a $\beta\beta$ - prechodov.



Obrázok 7: Fermiho maticový element pre $2\nu\beta\beta$ -rozpad v závislosti od parametra p - p interakcie. Pôvod a označenia jednotlivých riešení sú rovnaké ako v grafe 6. Maticový element $c23$) bol získaný kombináciou jednoduchých β -prechodov $c2), c3)$. Parametre modelového priestoru sú totožné s tými, ktoré boli použité pri konštrukcii grafu 4.

4.2 Výpočet Greenových funkcií $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezentácii.

Obyčajne je výpočet maticových elementov $2\nu\beta\beta$ -rozpadu spojený s konštruovaním úplnej sústavy stavov prechodového jadra $(A, Z+1)$, tak ako to vyžadujú vzťahy (11) a (12). Opisu sústavy vzбудených stavov sa môžeme vyhnúť použitím integrálnej reprezentácie zodpovedajúcich mnohonukleónových Greenových funkcií [pozri (8) a (9)]. Uskutočniť daný výpočet je možné a zaujímavé v rámci schematických modelov. Pre jednoduchosť použijeme bozónovú reprezentáciu protón-neutrónového Lipkinovho modelu s určitými ohraničeniami.

Pre Fermiho maticový element dvojitého β -prechodu máme [pozri (8)]:

$$M_F^{2\nu} = \langle 0_f^+ | \frac{i}{2} \int_0^\infty [\beta^-(t/2), \beta^-(-t/2)] dt | 0_i^+ \rangle, \quad (66)$$

$$\beta^-(t/2) = e^{iHt/2} \beta^-(0) e^{-iHt/2}, \quad \beta^-(0) = \sqrt{2\Omega} (u_p v_n \mathcal{O}_B^\dagger + v_p u_n \mathcal{O}_B),$$

kde $\mathcal{O}_B^\dagger$ ($\mathcal{O}_B$) je bozónový obraz fermiónového operátora $A^\dagger$ (A):

$$\mathcal{O}_B^\dagger = B^\dagger + \alpha_{21} B^\dagger B^\dagger B + \alpha_{32} B^\dagger B^\dagger B^\dagger B + \dots, \quad \mathcal{O}_B = (\mathcal{O}_B^\dagger)^\dagger, \quad (67)$$

a

$$\alpha_{21} = \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}} - 1, \quad \alpha_{32} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}} + \frac{1}{2}. \quad (68)$$

Výpočet maticového elementu $M_F^{2\nu}$ vyžaduje konečný operátorový rozklad výrazov

$$e^{iHt/2} B^\dagger e^{-iHt/2}, \quad e^{-iHt/2} B^\dagger e^{iHt/2}, \quad (69)$$

resp. tých k nim komplexne združených. To je realizovateľné v prípade, keď hamiltonián H má nasledovný tvar

$$H = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \text{const.}, \quad (70)$$

kde pre operátory $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ platia komutačné vzťahy [23]

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \eta \hat{c}, \quad [\hat{a}, \hat{c}] = -\lambda \hat{a}, \quad [\hat{b}, \hat{c}] = \lambda \hat{b}, \quad \eta, \lambda - \text{čísla.} \quad (71)$$

Potom môžeme písať

$$e^{iHt/2} = e^{\alpha(t)\hat{b}} e^{\beta(t)\hat{c}} e^{\gamma(t)\hat{a}}. \quad (72)$$

Derivovaním (72) podľa času dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc pre funkcie α , β , γ :

$$\frac{d\alpha}{dt} + \lambda\alpha + \frac{\lambda\eta}{2}\alpha^2 = 1, \quad \frac{d\beta}{dt} - \eta\alpha = 1, \quad \frac{d\gamma}{dt} = e^{-\beta\lambda}. \quad (73)$$

Počiatkové podmienky $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$ a $\gamma(0) = 0$ určujú jednoznačné riešenie týchto rovníc (73).

Je zrejmé, že podmienkam (70) a (71) vyhovuje kvadratický bozónový hamiltonián $H_B^{(QBA)}$ (rovnica (64)). V danom prípade $\hat{a} = \alpha_{02} BB$, $\hat{b} = \alpha_{02} B^\dagger B^\dagger$ a $\hat{c} = \alpha_{11} B^\dagger B + \alpha_{11}/2$, a zároveň $\lambda = -2\alpha_{11}$ a $\eta = 4\alpha_{02}^2/\alpha_{11}$. Funkcie $\alpha(t)$, $\beta(t)$ a $\gamma(t)$ sú potom dané nasledovne:

$$\alpha(t) = \gamma(t) = -\frac{1-L^2}{\eta} \cdot \frac{\tan(yt)}{\tan(yt) + iL}, \quad (74)$$

$$\beta(t) = \frac{2}{\lambda} \ln \left(\cos(yt) - \frac{i}{L} \sin(yt) \right),$$

kde

$$L = \frac{E_{RPA}}{\alpha_{11}}, \quad y = \frac{E_{RPA}}{2}, \quad (75)$$

a $E_{RPA} = \sqrt{\alpha_{11}^2 - 4\alpha_{02}^2}$, čo je energia zodpovedajúca riešeniu štandardnej QRPA metódy.

S využitím vzťahov (14) a (72) získame:

$$\begin{aligned} e^{iHt/2} B^\dagger e^{-iHt/2} &= e^{\alpha(it/2)\hat{b}} e^{\beta(it/2)\hat{c}} e^{\gamma(it/2)\hat{a}} B^\dagger e^{-\gamma(it/2)\hat{a}} e^{-\beta(it/2)\hat{c}} e^{-\alpha(it/2)\hat{b}} = \\ &= UB^\dagger + VB, \\ e^{iHt/2} B e^{-iHt/2} &= U^* B + V^* B^\dagger, \\ e^{-iHt/2} B^\dagger e^{iHt/2} &= U^* B^\dagger + V^* B, \\ e^{-iHt/2} B e^{iHt/2} &= UB + VB^\dagger, \end{aligned} \quad (76)$$

kde

$$U = \cos\left(\frac{E_{RPA}}{2}t\right) + i\frac{\alpha_{11}}{E_{RPA}} \sin\left(\frac{E_{RPA}}{2}t\right), \quad V = i\frac{2\alpha_{02}}{E_{RPA}} \sin\left(\frac{E_{RPA}}{2}t\right). \quad (77)$$

Ak sa ohraničíme prvými členmi v expanzii fermiónových operátorov A , $A^\dagger$ do bozónového priestoru, β -prechodový operátor je daný nasledovne:

$$\beta_{(1)}^-(0) = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n B^\dagger + v_p u_n B). \quad (78)$$

V tomto prípade sa komutátor $[\beta_{(1)}^-(t/2), \beta_{(1)}^-(-t/2)]$ (počítaný pomocou rovníc (76)) rovná konštante, t.j. je nezávislý od B , $B^\dagger$ operátorov:

$$\begin{aligned} [\beta_{(1)}^-(t/2), \beta_{(1)}^-(-t/2)] &= (u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2)(U^* V - V^* U) \\ &\quad + u_p v_n v_p u_n (V^2 - U^2 + U^{*2} - V^{*2}), \end{aligned} \quad (79)$$

a pre $M_F^{(1)}$ dostaneme:

$$M_F^{(1)} = 2\Omega \frac{\mathcal{F}}{E_{RPA}} \int_0^\infty \sin(E_{RPA}t) dt \langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle = \frac{2\Omega}{E_{RPA}^2} \mathcal{F}, \quad (80)$$

$$\mathcal{F} = \left(\alpha_{11} u_p v_n v_p u_n - \alpha_{02} (u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) \right) \langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle.$$

Pozoruhodné na danom výsledku je, že v prípade ortogonalnosti základných stavov pôvodného a konečného jadra ($|0_i^+\rangle$ a $|0_f^+\rangle$), hodnota $M_F^{(1)}$ je rovná nule. V realistických QRPA výpočtoch tieto stavy však nie sú ortogonálne

a ak miesto nich použijeme priblíženia vo forme BCS vakuí, dostaneme $\langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle \approx 0.6 - 0.8$. To vedie na nefyzikálny príspevok do maticového elementu M_F . Žiada sa zdôrazniť, že operátor $2\nu\beta\beta$ -prechodu musí byť minimálne dvojčaticový operátor, ktorý zmení dva neutróny na dva protóny a nie konštanta. Z uvedeného dôvodu vyplýva, že fyzikálny príspevok do maticového elementu M_F má pôvod vo vyšších členoch bozónového rozvoja beta-prechodových operátorov, resp. jadrového hamiltoniánu. V rámci daných štúdií preskúmame prvú možnosť.

Ak uvažujeme prvé dva členy v bozónovej expanzii $A, A^\dagger$ operátorov (67), pre β -prechodový operátor dostaneme:

$$\beta_{(1+2)}^- = \sqrt{2\Omega} \left(u_p v_n (B^\dagger + \alpha_{21} B^\dagger B^\dagger B) + v_p u_n (B + \alpha_{21} B^\dagger B B) \right). \quad (81)$$

V danom prípade komutátor $[\beta_{(1+2)}^-(t/2), \beta_{(1+2)}^-(-t/2)]$ už nie je rovný konštante, ale závislý od $B^\dagger, B$. Maticový element $M_F^{(1+2)}$ teraz pozostáva z dvoch častí:

$$M_F^{(1)} \sim \langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle \quad \text{a} \quad M_F^{(2)} \sim \sum_{k,l=0}^4 \langle 0_f^+ | (B)^k (B^\dagger)^l | 0_i^+ \rangle. \quad (82)$$

Využitím vzťahu $B|0_i^+\rangle = 0$ a explicitných tvarov (77) funkcií U a V , môžeme element $M_F^{(1+2)}$ prepísať v tvare

$$\begin{aligned} M_F^{(1+2)} &= 2\Omega \int_0^\infty \left[S_1 \sin(E_{RPA}t) + S_2 \sin(2E_{RPA}t) + S_3 \sin(3E_{RPA}t) \right] dt \times \\ &\times \langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle = \frac{2\Omega}{2} \left[S_1 \frac{2}{E_{RPA}} + S_2 \frac{1}{E_{RPA}} + S_3 \frac{2}{3E_{RPA}} \right] \langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle, \end{aligned} \quad (83)$$

kde S_1, S_2, S_3 sú racionálne funkcie parametrov $\alpha_{11}, \alpha_{02}, \alpha_{21}, u_\tau, v_\tau$ a E_{RPA} ($\tau = p, n$). Ich forma bude prezentovaná v pripravovanej publikácii.

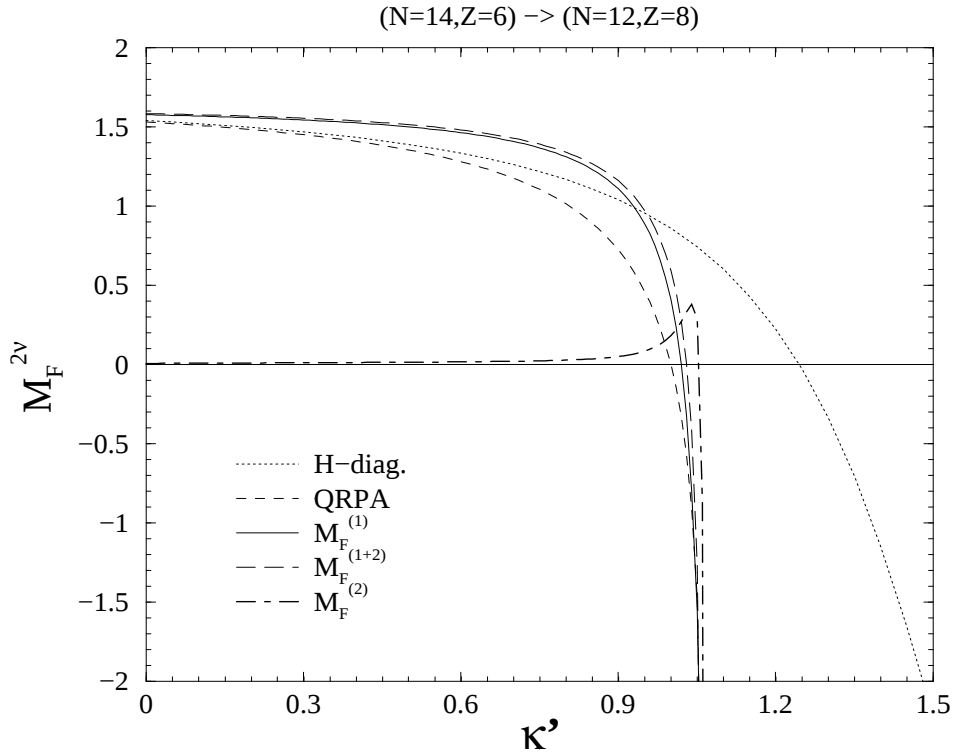
Z horeuvedených dôvodov vyplýva, že fyzikálny príspevok do M_F je určený nasledovne:

$$M_F^{(2)} = M_F^{(1+2)} - M_F^{(1)}. \quad (84)$$

V grafe 8 sú zobrazené maticové elementy $M_F^{(1)}, M_F^{(1+2)}$ a $M_F^{(2)}$ ako funkcie p - p interakcie κ' pre maximálny prípad prekrytia vlnových funkcií $\langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle = 1$. Riešenia existujú len do oblasti kolapsu štandardného QRPA riešenia, čo súvisí s voľbou použitého hamiltoniánu $H_B^{(QBA)}$. Všimnime si, že maticový element $M_F^{(2)}$, ktorý má svoje fyzikálne opodstatnenie, má maximum v okolí $\kappa' = 1$, t.j. v kritickej oblasti z hľadiska kolapsu QRPA. Z toho vyplýva, že pre spoľahlivý opis $2\nu\beta\beta$ -maticového elementu je nevyhnutné ísť za rámec

QBA jadrového hamiltoniánu. Jedna z možností je použiť na tento účel sofistikovanejší $SO(5)$ model.

Na obrázku 8 sú uvedené aj výsledky exaktných a EPP-QRPA výpočtov M_F s vyjadrením beta-prechodov cez jadro $(A, Z+1)$. Ako sme už spomínali, uvedené výsledky sú zaťažené tzv. dvojvákuovým problémom. Z porovnania s ostatnými priebehmi vyplýva, že dvojvákuový problém, vyskytujúci sa v QRPA výpočtoch s použitím prechodového jadra, môže viesť na značne nefyzikálne príspevky do M_F a to zvlášť v oblasti malých hodnôt κ' .



Obrázok 8: Fermiho maticový element pre $2\nu\beta\beta$ -rozpad v závislosti od parametra p - p interakcie, počítaný v integrálnej reprezentácii. $M_F^{(1)}$ je element získaný použitím len prvého člena v bozónovej expanzii β -prechodového operátora, $M_F^{(1+2)}$ zahrnutím prvých dvoch členov z expanzie β a $M_F^{(2)} = M_F^{(1+2)} - M_F^{(1)}$ je fyzikálny príspevok z M_F do $2\nu\beta\beta$ -prechodu. Pre porovnanie sú uvedené hodnoty maticových elementov určené pomocou diagonalizácie H_F a štandardnou QRPA metódou. Použitý modelový priestor je rovnaký ako v prípade grafu 4.

V rámci daného projektu predpokladáme pokračovať nasledovne:

1. Vypočítať Fermiho maticový element $2\nu\beta\beta$ -prechodu využitím jeho integrálnej reprezentácie a jadrový hamiltonián (58) idúci za rámec QBA.
2. Nájsť vhodný rozklad operátora e^{iHt} v rámci $O(5)$ modelu [18] s následným výpočtom $2\nu\beta\beta$ -maticových elementov v integrálnej reprezentácii.
3. Zhodnotenie získaných výsledkov a príprava publikácie.

4.3 Aplikácia metódy PP-QRPA na realistický opis $2\nu\beta\beta$ -prechodov

Štúdie v rámci schematických modelov ukázali na dôležitosť Pauliho vylučovacieho princípu pri opise mnohonukleónovej sústavy. V práci [13] bolo nájdené QRPA riešenie s exaktným vyplnením Pauliho vylučovacieho princípu. To však je možné len v rámci schematických modelov, keďže rovnica $Q|RPA\rangle = 0$ v prípade realistických výpočtov nie je analyticky riešiteľná. Ako bolo prezentované v danej práci, uvedený problém sa dá dostatočne presne riešiť perturbatívnym prístupom s využitím približného ansatzu pre RPA základný stav, tzv. PP-QRPA, čo môže viesť na aplikácie pre realistické výpočty. Výhodou týchto prístupov je práca vo fermiónovom priestore a exaktné vyplnenie Pauliho princípu pri počítaní komutátorov s účasťou jadrového hamiltoniánu. Daným spôsobom sa docieľuje, že kolaps QRPA riešenia nevzniká vo fyzikálnej oblasti predmetných parametrov. To je výhoda v porovnaní so štandardnou QRPA a RQRPA, čo by mohlo viesť po úspešnej aplikácii danej metódy v prípade realistických výpočtov, k nahradeniu uvedených bežne používaných metód.

V rámci projektu predpokladáme získanie QRPA riešení (energie, amplitúdy jednoduchých β -prechodov, maticové elementy $2\nu\beta\beta$ -premeny) na značnom intervale hodnôt parametra časticovo-časticovej interakcie v prípade výpočtov s realistickým jadrovým hamiltoniánom. Predmetom nášho záujmu bude model navrhnutý Kuzminom a Solovievom [15], ktorý predstavuje zovšeobecnenie a rozšírenie jednovrstvových schematických hamiltoniánov (23), (24):

$$H = H_p + H_n + H_{res}. \quad (85)$$

Jednočasticové členy H_p , H_n majú tvar

$$H_\tau = \sum_{\tau, m_\tau} e_\tau a_{\tau m_\tau}^\dagger a_{\tau m_\tau} - \sum_\tau G_\tau S_\tau^\dagger S_\tau, \quad \tau = p, n, \quad (86)$$

a reziduálna časť hamiltoniánu je určená separovateľnou interakciou

$$H_{res} = 2\chi \sum_{M=-J}^J (-1)^M : \beta_{JM}^- (\beta_{J-M}^-)^\dagger : - 2\kappa \sum_{M=-J}^J (-1)^M : P_{JM}^- (P_{J-M}^-)^\dagger : ,$$

$$\beta_{JM}^- = \sum_{pn} \langle p | \mathcal{O}_{JM} | n \rangle a_p^+ a_n, \quad P_{JM}^- = \sum_{pn} \langle p | \mathcal{O}_{JM} | n \rangle a_p^+ \tilde{a}_n^+,$$

$$\mathcal{O}_{1M} = \sigma_M \tau^- \text{ - Gamow-Tellerove pr.}, \quad \mathcal{O}_{00} = \tau^- \text{ - Fermiho pr.} \quad (87)$$

Uvedený hamiltonián umožňuje realistický opis Fermiho a Gamow-Tellerových $2\nu\beta\beta$ -prechodov.

Za účelom QRPA výpočtov je potrebné prepísať uvedený časticový hamiltonián do kvázičasticovej reprezentácie s využitím Bogoliubovovej transformácie. To vedie na nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} \beta_{1\mu}^- &= \sum_{pn} \sigma(pn) [u_p v_n A^\dagger(pn, 1\mu) + v_p u_n \tilde{A}(pn, 1\mu) - u_p u_n B^\dagger(pn, 1\mu) \\ &\quad + v_p v_n \tilde{B}(pn, 1\mu)], \\ P_{1\mu}^- &= \sum_{pn} \sigma(pn) [u_p u_n A^\dagger(pn, 1\mu) - v_p v_n \tilde{A}(pn, 1\mu) + u_p v_n B^\dagger(pn, 1\mu) \\ &\quad + v_p u_n \tilde{B}(pn, 1\mu)], \end{aligned} \quad (88)$$

$$\sigma(pn) = \frac{\langle p || \sigma || n \rangle}{\sqrt{3}} .$$

Operátory protón-neutrónových párov kvázičastíc vystupujúce v (88) majú tvar:

$$\begin{aligned} A^\dagger(pn, 1\mu) &= [\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger]_\mu^{J=1}, \quad A = (A^\dagger)^\dagger, \quad B^\dagger(pn, 1\mu) = [\alpha_p^\dagger \tilde{\alpha}_n]_\mu^{J=1}, \quad B = (B^\dagger)^\dagger, \\ \tilde{A}(pn, 1\mu) &= (-1)^{1-\mu} A(pn, 1-\mu), \quad \tilde{B}(pn, 1\mu) = (-1)^{1-\mu} B(pn, 1-\mu). \end{aligned} \quad (89)$$

Explicitné vyjadrenia bifermiónových operátorov (89) cez kvázičasticové operátory $\alpha_\tau^\dagger$, α_τ sú potrebné pri exaktnom výpočte komutátorov vystupujúcich v QRPA maticiach.

Pre určenie RPA maticových elementov je však nevyhnutné poznať analytickú formu základného stavu $|RPA\rangle$. V súlade s navrhnutou PP-QRPA metódou budeme uvažovať QRPA základný stav v nasledovnom tvare:

$$|RPA\rangle = N e^{-\sum_{pn p' n', J} d_{pn p' n', J} A^\dagger(pn, J\mu) A^\dagger(pn, J\mu)} | >, \quad d = -Y X^{-1}/2, \quad (90)$$

kde N je norma a X, Y sú variačné amplitúdy vystupujúce v QRPA rovniciach. Pre jednoduchosť je možné sa ohraničiť prvými členmi v perturbatívnom rozklade $|RPA\rangle$ cez mocniny parametra d .

Realizáciu uvedenej úlohy môžeme rozdeliť na nasledujúce časti:

1. Odvodenie formúl pre komutátory bifermiónových operátorov $A^\dagger, A, B^\dagger, B, N_\tau$.
2. Perturbatívny výpočet QRPA matíc s presnosťou na zvolenú mocninu parametra d .
3. Výpočet $2\nu\beta\beta$ -prechodu pre zvolený jadrový systém, napr. $A = 76, 100$: diagonalizácia QRPA rovníc, konštrukcia vzbudených stavov prechodového jadra, výpočet $M_{GT}^{2\nu}$ použitím vzťahu (22).
4. Porovnanie výsledkov získaných v rámci PP-QRPA s príslušnými hodnotami dosiahnutými pomocou štandardnej a renormalizovanej QRPA. Príprava publikácie.

Literatúra

- [1] W. C. Haxton a G. J. Stephenson Jr. , *Prog. Part. Nucl. Phys.* **12**, 409 (1984).
- [2] M. Doi, T. Kotani a E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys. (Supp.)* **83**, 1 (1985).
- [3] A. Faessler a F. Šimkovic, *J. Phys. G* **24**, 1 (1998).
- [4] P. Vogel a M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 3148 (1986).
- [5] O. Civitarese, A. Faessler a T. Tomoda, *Phys. Lett. B* **194**, 11 (1987).
- [6] J. Toivanen a J. Suhonen , *Phys. Rev. Lett.* **75** 410 (1995), *Phys. Rev. C* **55**, 2314 (1997).
- [7] J. Schwieger, F. Šimkovic a A. Faessler, *Nucl. Phys. A* **600**, 179 (1996).
- [8] F. Šimkovic, G. Pantis a A. Faessler, *Yad. Fiz.* **61**, 1218 (1998).
- [9] J. G. Hirsch, P. O. Hess a O. Civitarese, *Phys. Rev. C* **54**, 1976 (1996).
- [10] O. Civitarese, P. O. Hess a J. G. Hirsch, *Phys. Lett. B* **412**, 1 (1997).
- [11] A. A. Raduta, O. Haug, F. Šimkovic a A. Faessler, *J. Phys. G* **26**, 1327 (2000), *Nucl. Phys. A* **671**, 255 (2000).
- [12] F. Šimkovic a G. Pantis, *Yad. Fiz.* **62**, 1 (1999).
- [13] F. Šimkovic, A. A. Raduta, M. Veselský a A. Faessler, *Phys. Rev. C* **61**, 1 (2000).
- [14] F. Šimkovic, *Czech. J. Phys B* **41**, 1105 (1991).
- [15] V. A. Kuzmin a V. G. Soloviev, *Nucl. Phys. A* **486**, 118 (1988).
- [16] J. Engel, S. Pittel, M. Stoitsov, P. Vogel, and J. Dukelsky, *Phys. Rev. C* **55**, 1781 (1997).
- [17] J. Engel, K. Langanke, P. Vogel, *Phys. Lett. B* **429**, 215 (1998).
- [18] F. Krmpotić et al, *Nucl. Phys. A* **637**, 295 (1998).
- [19] H. J. Lipkin, N. Meshkov a S. Glick *Nucl. Phys. A* **62**, 188 (1965).

- [20] O. Civitarese a J. Suhonen, *Nucl. Phys. A* **578**, 62 (1994), *J. Phys. G* **20**, 1441 (1994).
- [21] P. Ring a P. Schuck, *The Nuclear Many Body Problem* (Springer, New York, 1980).
- [22] A. Sambataro a J. Suhonen, *Phys. Rev. C*, **56** 782 (1997).
- [23] D. A. Kirzhnits *Field Theoretical Methods in Many-Body Systems* (Pergamon Press 1967).